बहुपद

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» भूमिका - बीजीय व्यंजक और सर्वसमिकाएँ

» एक चर वाले बहुपद - चर, अचर और परिभाषा

» पद और गुणांक

» एकपदी, द्विपद और त्रिपद

» बहुपद की घात - रैखिक, द्विघाती, त्रिघाती

» बहुपद के शून्यक

» रैखिक बहुपद का एकमात्र शून्यक

» गुणनखंड प्रमेय

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. सर्वसमिका का उपयोग करके $(x - 3)^2$ का विस्तार कीजिए।

› $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ में $y = 3$ रखो

› $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

› जाँच: $x = 1$ पर left $= (-2)^2 = 4$; right $= 1 - 6 + 9 = 4$ – सही

उत्तर – $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

उदाहरण 2. क्या $x + 1/x$ एक चर में बहुपद है? कारण सहित उत्तर दीजिए।

› $x + 1/x = x + x^{1}$ लिखो

› दूसरे पद का घातांक −1 है, जो पूर्ण संख्या नहीं

› अतः यह बीजीय व्यंजक एक बहुपद नहीं है

उत्तर – नहीं; क्योंकि घातांक −1 पूर्ण संख्या नहीं है।

उदाहरण 3. बहुपद $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक लिखिए।

› पद पहचानो: 2, $-x^2$, x^3

› x^2 वाला पद $-x^2$ है

› अतः गुणांक −1 है

उत्तर – −1

उदाहरण 4. 35 घात का एक द्विपद और 100 घात का एक एकपदी का उदाहरण दीजिए।

› द्विपद = ठीक दो पद; घात 35 उदाहरण: $x^3 + 1$

› एकपदी = ठीक एक पद; घात 100 उदाहरण: $7x^{1}$

› जाँच: पहले में 2 पद, दूसरे में 1 पद – सही

उत्तर – द्विपद: $x^3 + 1$ (या कोई समकक्ष); एकपदी: x^{1} (या $5x^{1}$ आदि)

उदाहरण 5. निम्नलिखित की घात लिखिए: (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) 3

› (i) अधिकतम घातांक 3 ⇒ घात 3

› (ii) अधिकतम घातांक 2 ⇒ घात 2

› (iii) $3 = 3x$ ⇒ घात 0

उत्तर – (i) 3 (ii) 2 (iii) 0

उदाहरण 6. सत्यापित कीजिए कि −2 बहुपद $x + 2$ का शून्यक है पर 2 नहीं है।

› $p(x) = x + 2$ लिखो

› $p(-2) = -2 + 2 = 0$ ⇒ −2 शून्यक है

› $p(2) = 2 + 2 = 4 \neq 0$ ⇒ 2 शून्यक नहीं

उत्तर – −2 शून्यक है; 2 शून्यक नहीं है।

उदाहरण 7. बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

› $p(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0$

› $3x = 2 \Rightarrow x = 2/3$

› सूत्र से: $a=3, b=-2 \Rightarrow -b/a = -(-2)/3 = 2/3$

उत्तर – शून्यक = 2/3

उदाहरण 8. यदि $x - 1$, बहुपद $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ का गुणनखंड है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

› गुणनखंड प्रमेय: $p(1) = 0$ होना चाहिए

› $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k = 4 + 3 - 4 + k = 3 + k$

› $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$

उत्तर – k = −3

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

- Exam में expansion लिखते समय बीच का 2xy term ज़रूर लिखो; marks कटने का सबसे आम कारण यही है।
- 'बहुपद है/नहीं' वाले प्रश्नों में हमेशा घातांक का कारण लिखो – सिर्फ हाँ/नहीं से पूरे अंक नहीं मिलते।
- गुणांक पूछे तो हमेशा चिह्न लिखो – −1 को 1 मत बनाओ।
- 'उदाहरण दीजिए' में घात और पद-संख्या दोनों शर्तें पूरा करो – सिर्फ घात लिखना काफी नहीं।
- शून्य बहुपद की घात '0' मत लिखना – NCERT कहता है परिभाषित नहीं है।
- 'जाँच कीजिए' में दोनों – दिए गए मान पर गणना और निष्कर्ष – साफ़ लिखो।
- उत्तर में 'एकमात्र शून्यक' शब्द लिखो – ACERT/NCERT language marks दिलाती है।
- उत्तर में 'गुणनखंड प्रमेय के अनुसार' लिखकर निष्कर्ष दो – method marks मिलते हैं।

एक नज़र में रिवीज़न

› तीन identities: $(x \pm y)^2$ और $x^2 - y^2$ – गुणनखंडन की चाबी।

› चर बदलता है, अचर नहीं; बहुपद = whole-number exponents only।

› पद गिनो ⇒ गुणांक चिह्न सहित लिखो; अचर पद = x वाला गुणांक।

› mono/bi/tri = 1/2/3 terms; like terms जोड़कर फिर गिनो।

› Degree = highest power; zero polynomial degree undefined; constant non-zero ⇒ degree 0।

› Zero ⇒ necessarily 0; evaluate p(c); root of $p(x)=0$ = zero of polynomial।

› Linear exactly one zero = −b/a।

› p(a)=0 (x−a) is a factor; for (x+a) test x=−a।