गुणनखंडन

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखंड

प्रश्न 1 (आसान). संख्या 10 के गुणनखंड लिखिए।

उत्तर – 1, 2, 5, 10

प्रश्न 2 (आसान). क्या संख्या 7 एक अभाज्य संख्या है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 3 (मध्यम). संख्या 18 के अभाज्य गुणनखंड क्या हैं?

उत्तर – 2 × 3 × 3

प्रश्न 4 (कठिन). संख्या 60 के अभाज्य गुणनखंड रूप को लिखिए।

उत्तर – 2 × 2 × 3 × 5

» बीजीय व्यंजकों के अखंडनीय गुणनखंड

प्रश्न 5 (आसान). 6x के अखंडनीय गुणनखंड बताइए।

उत्तर – 2, 3, x

प्रश्न 6 (आसान). $7y^2$ के अखंडनीय गुणनखंड क्या होंगे?

उत्तर – 7, y, y

प्रश्न 7 (मध्यम). 15mn(m-1) के अखंडनीय गुणनखंड लिखिए।

उत्तर – 3, 5, m, n, (m-1)

प्रश्न 8 (कठिन). $24p^2q(p+q)$ के अखंडनीय गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 2, 2, 2, 3, p, p, q, (p+q)

» गुणनखंडन की परिभाषा और आवश्यकता

प्रश्न 9 (आसान). व्यंजक 5x + 10 के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – 5(x + 2)

प्रश्न 10 (आसान). व्यंजक 4a - 8 के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – 4(a - 2)

प्रश्न 11 (मध्यम). व्यंजक 7mn + 21m के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – 7m(n + 3)

प्रश्न 12 (कठिन). व्यंजक $6x^2y - 12xy^2$ के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – 6xy(x - 2y)

» सार्व गुणनखंडों की विधि

प्रश्न 13 (आसान). $2x + 4$

उत्तर – $2(x + 2)$

प्रश्न 14 (आसान). $5y - 15$

उत्तर – $5(y - 3)$

प्रश्न 15 (मध्यम). $3mn + 6m^2$

उत्तर – $3m(n + 2m)$

प्रश्न 16 (कठिन). $10x^3 - 15x^2 + 20x$

उत्तर – $5x(2x^2 - 3x + 4)$

» पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखंडन

प्रश्न 17 (आसान). $x^2 + xy + 8x + 8y$ का गुणनखंडन करें।

उत्तर – $(x + 8)(x + y)$

प्रश्न 18 (आसान). $15ab + 5a + 3b + 1$ का गुणनखंडन करें।

उत्तर – $(5a + 1)(3b + 1)$

प्रश्न 19 (मध्यम). $ax + bx - ay - by$ का गुणनखंडन करें।

उत्तर – $(a + b)(x - y)$

प्रश्न 20 (कठिन). $z - 7 + 7xy - xyz$ का गुणनखंडन करें।

उत्तर – $(1 - xy)(z - 7)$

» सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन $(a\pm b)^2$ और a^2-b^2)

प्रश्न 21 (आसान). $x^2 + 10x + 25$ के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – $(x+5)^2$

प्रश्न 22 (आसान). $y^2 - 16$ के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – $(y-4)(y+4)$

प्रश्न 23 (मध्यम). $9m^2 - 42mn + 49n^2$ के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – $(3m - 7n)^2$

प्रश्न 24 (कठिन). $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ के गुणनखंड कीजिए।

उत्तर – $(a - b - c)(a - b + c)$

» (x+a)(x+b) के रूप के गुणनखंड

प्रश्न 25 (आसान). $p^2 + 7p + 12$

उत्तर – $(p+3)(p+4)$

प्रश्न 26 (आसान). $x^2 + 6x + 8$

उत्तर – $(x+2)(x+4)$

प्रश्न 27 (मध्यम). $y^2 - 7y + 12$

उत्तर – $(y-3)(y-4)$

प्रश्न 28 (कठिन). $z^2 - 4z - 12$

उत्तर – $(z-6)(z+2)$

» बीजीय व्यंजकों का विभाजन का परिचय

प्रश्न 29 (आसान). अगर $4y \times 2y = 8y^2$ है, तो $8y^2 \div 4y$ क्या होगा?

उत्तर – $2y$

प्रश्न 30 (आसान). अगर $9x^3 = 3x \times 3x^2$ है, तो $9x^3$ को $3x^2$ से भाग देने पर क्या मिलेगा?

उत्तर – $3x$

प्रश्न 31 (मध्यम). अगर $3a(a + 2) = 3a^2 + 6a$ है, तो $(3a^2 + 6a) \div (a + 2)$ क्या होगा?

उत्तर – $3a$

» एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

प्रश्न 32 (आसान). $8y^3 \div 2y$

उत्तर – $4y^2$

प्रश्न 33 (आसान). $15a^2 \div 3a$

उत्तर – $5a$

प्रश्न 34 (मध्यम). $-36p \div 9p^3$

उत्तर – $-4p^2$

प्रश्न 35 (कठिन). $48mn^2 \div 6m^3n$

उत्तर – $8mn$

» एक बहुपद का एक एकपदी से विभाजन

प्रश्न 36 (आसान). $(10x + 15)$ को 5 से भाग दें।

उत्तर – $2x + 3$

प्रश्न 37 (आसान). $(8m^2 - 4m)$ को $2m$ से भाग दें।

उत्तर – $4m - 2$

प्रश्न 38 (मध्यम). $(9x^3 + 6x^2 + 3x)$ को $3x$ से भाग दें।

उत्तर – $3x^2 + 2x + 1$

प्रश्न 39 (कठिन). $(12p - 18p^3 + 6p^2)$ को $6p^2$ से भाग दें।

उत्तर – $2p^2 - 3p + 1$

» बहुपद का बहुपद से विभाजन

प्रश्न 40 (आसान). $(10x - 25)$ को 5 से भाग दीजिए।

उत्तर – $2x - 5$

प्रश्न 41 (आसान). $10y(6y + 21)$ को $5(2y + 7)$ से भाग दीजिए।

उत्तर – $3y$

प्रश्न 42 (मध्यम). $(y^2 + 7y + 10)$ को $(y + 5)$ से भाग दीजिए।

उत्तर – $y + 2$

प्रश्न 43 (कठिन). $39y^3(50y^2 - 98)$ को $26y^2(5y + 7)$ से भाग दीजिए।

उत्तर – $3y(5y - 7)$

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. संख्या 42 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले 42 को सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से भाग करेंगे। 42 ÷ 2 = 21।

› अब 21 को अगली सबसे छोटी अभाज्य संख्या (जो 21 को भाग कर सके) से भाग करेंगे। 2 से नहीं होगा, तो 3 से करेंगे। 21 ÷ 3 = 7।

› अब 7 एक अभाज्य संख्या है, तो 7 को 7 से भाग करेंगे। 7 ÷ 7 = 1।

› तो, 42 = 2 × 3 × 7। ये सभी अभाज्य गुणनखंड हैं।

उत्तर – 42 के अभाज्य गुणनखंड 2, 3 और 7 हैं।

उदाहरण 2. व्यंजक 10ab(a+3) के अखंडनीय गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले संख्या वाले भाग को तोड़ेंगे: 10 को हम 2 × 5 लिख सकते हैं।

› फिर चर वाले भाग को देखेंगे: 'a' और 'b' अपने आप में अखंडनीय हैं, इन्हें और नहीं तोड़ा जा सकता।

› अब कोष्ठक वाले भाग पर आते हैं: (a+3) एक पूरा पद है, इसे और नहीं तोड़ा जा सकता। ये एक अखंडनीय गुणनखंड है।

› सभी को एक साथ गुणा के रूप में लिखने पर हमें मिलता है: 2 × 5 × a × b × (a+3)।

उत्तर – 10ab(a+3) के अखंडनीय गुणनखंड 2, 5, a, b और (a+3) हैं।

उदाहरण 3. व्यंजक 3y + 6 के गुणनखंड कीजिए।

› पहला पद है 3y और दूसरा पद है 6।

› अब देखो, क्या इनमें कोई चीज़ कॉमन है? हाँ, 3 दोनों में कॉमन है।

› 3y में से 3 बाहर निकाला तो y बचा।

› 6 में से 3 बाहर निकाला तो 2 बचा। (क्योंकि 3 x 2 = 6)

› तो हम इसे लिखेंगे 3(y + 2)।

उत्तर – 3(y + 2)

उदाहरण 4. व्यंजक $12a^2b + 15ab^2$ के गुणनखंड कीजिए।

› पहला पद है $12a^2b$। इसके अखंडनीय गुणनखंड होंगे: 2 × 2 × 3 × a × a × b।

› दूसरा पद है $15ab^2$। इसके अखंडनीय गुणनखंड होंगे: 3 × 5 × a × b × b।

› अब, देखो दोनों में क्या-क्या एक जैसा है? एक '3' है, एक 'a' है, और एक 'b' है।

› तो हमारा सार्व गुणनखंड (common factor) हुआ 3ab।

› अब हम इस 3ab को बाहर निकालेंगे।

› पहले पद $12a^2b$ में से 3ab बाहर निकालने पर क्या बचा? (2 × 2 × a) यानी 4a।

› दूसरे पद $15ab^2$ में से 3ab बाहर निकालने पर क्या बचा? (5 × b) यानी 5b।

› तो अब हम इसे लिखेंगे 3ab (4a + 5b)।

› हो गया गुणनखंडन!

उत्तर – 3ab(4a + 5b)

उदाहरण 5. व्यंजक 6xy - 4y + 6 - 9x का गुणनखंड कीजिए।

› पहला चरण: व्यंजक को देखें - 6xy - 4y + 6 - 9x. क्या सभी पदों में कोई सार्व गुणनखंड है? नहीं.

› दूसरा चरण: पदों का समूह बनाते हैं. पहले दो पद, 6xy - 4y, में सार्व गुणनखंड '2y' है. तो हम लिखेंगे 2y(3x - 2).

› तीसरा चरण: अब बाकी के दो पद, 6 - 9x को देखें. इन्हें हम -9x + 6 भी लिख सकते हैं. इनमें सार्व गुणनखंड '3' है. या फिर '-3' भी ले सकते हैं ताकि ब्रैकेट के अंदर '3x - 2' जैसा पद बने. तो यह होगा -3(3x - 2).

› चौथा चरण: अब इन दोनों समूहों को एक साथ रखते हैं: 2y(3x - 2) - 3(3x - 2).

› पांचवां चरण: अब आप देख रहे हो कि दोनों पदों में एक सार्व गुणनखंड है - '(3x - 2)'. इसे बाहर निकाल लेते हैं. तो, (3x - 2)(2y - 3).

उत्तर – (3x - 2)(2y - 3)

उदाहरण 6. $49p^2 - 36$ के गुणनखंड कीजिए।

› पहला पद है $49p^2$. हम इसे $(7p)^2$ के रूप में लिख सकते हैं.

› दूसरा पद है 36. हम इसे $(6)^2$ के रूप में लिख सकते हैं.

› अब हमारा व्यंजक $(7p)^2 - (6)^2$ बन गया है, जो हमारी तीसरी सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ के रूप का है.

› यहाँ 'a' है 7p और 'b' है 6.

› तो, हम इसे (7p + 6)(7p - 6) के रूप में लिख सकते हैं.

उत्तर – (7p + 6)(7p - 6)

उदाहरण 7. $x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड कीजिए।

› यहाँ अचर पद 6 है और x का गुणांक 5 है।

› हमें ऐसी दो संख्याएँ 'a' और 'b' ढूंढनी हैं कि ab = 6 और a+b = 5 हो।

› 6 के गुणनखंड युग्म (factor pairs) हैं: (1, 6), (2, 3)।

› अब इनका जोड़ करके देखते हैं: 1+6 = 7 (यह 5 नहीं है), 2+3 = 5 (हाँ, यह 5 है!)।

› तो हमारी संख्याएँ 'a' = 2 और 'b' = 3 हैं।

› अब हम $x^2 + 5x + 6$ को $x^2 + 2x + 3x + 6$ लिख सकते हैं।

› पहले दो पदों में से x कॉमन लेंगे: x(x + 2)।

› अगले दो पदों में से 3 कॉमन लेंगे: 3(x + 2)।

› अब हमारे पास x(x + 2) + 3(x + 2) है।

› दोनों में से (x + 2) कॉमन लेंगे: (x + 2)(x + 3)।

उत्तर – (x + 2)(x + 3)

उदाहरण 8. अगर $5x(x + 4) = 5x^2 + 20x$ है, तो $(5x^2 + 20x) \div 5x$ क्या होगा?

› हमें दिया गया है कि $5x(x + 4)$ का गुणनफल $5x^2 + 20x$ है.

› चूंकि विभाजन गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है, तो गुणनफल को किसी भी एक गुणनखंड से भाग देने पर दूसरा गुणनखंड प्राप्त होगा.

› इसलिए, $(5x^2 + 20x)$ को $5x$ से भाग देने पर हमें दूसरा गुणनखंड $(x + 4)$ मिलेगा.

उत्तर – (x + 4)

उदाहरण 9. $-20x$ को $10x^2$ से विभाजित कीजिए।

› पहला कदम: $-20x$ को उसके अखंडनीय गुणनखंडों में लिखें।

› $-20x = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

› दूसरा कदम: $10x^2$ को उसके अखंडनीय गुणनखंडों में लिखें।

› $10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

› तीसरा कदम: अब इन्हें भाग के रूप में लिखें और सार्व गुणनखंडों को निरस्त करें।

› $(-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x) / (2 \times 5 \times x \times x)$

› ऊपर और नीचे से 2, 5, x, x काट दें।

› चौथा कदम: जो बचा है, उसे गुणा करें।

› $-2 \times x \times x$

उत्तर – $-2x^2$

उदाहरण 10. $4y^3 + 5y^2 + 6y$ को $2y$ से भाग दीजिए।

› पहला पद: $4y^3$ को $2y$ से भाग दें। $4/2 = 2$ और $y^3/y = y^2$। तो, यह $2y^2$ हुआ।

› दूसरा पद: $5y^2$ को $2y$ से भाग दें। $5/2 = 2.5$ (या $5/2$) और $y^2/y = y$। तो, यह $(5/2)y$ हुआ।

› तीसरा पद: $6y$ को $2y$ से भाग दें। $6/2 = 3$ और $y/y = 1$। तो, यह 3 हुआ।

› सभी भागों को जोड़ दें: $2y^2 + (5/2)y + 3$

उत्तर – $2y^2 + (5/2)y + 3$

उदाहरण 11. $44(x - 5x^3 - 24x^2)$ को $11x(x - 8)$ से भाग दीजिए।

› पहले भाज्य $44(x - 5x^3 - 24x^2)$ के गुणनखंड करेंगे।

› $44(x^2(x^2 - 5x - 24)) = 44x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$

› $= 44x^2(x(x - 8) + 3(x - 8))$

› $= 44x^2(x - 8)(x + 3)$

› अब हम भाग के रूप में लिखते हैं: $[44x^2(x - 8)(x + 3)] / [11x(x - 8)]$

› उभयनिष्ठ गुणनखंड 11, x और $(x - 8)$ हैं। इन्हें काट देंगे।

› तो बचता है: $(44/11) * (x^2/x) * (x + 3)$

› $= 4x(x + 3)$

उत्तर – भागफल = $4x(x + 3)$

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• अभाज्य गुणनखंडन के सवालों में, हमेशा सबसे छोटी अभाज्य संख्या से शुरू करना और फिर आगे बढ़ना, इससे गलती की संभावना कम होती है।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि यह गुणनखंडन के आगे के कठिन प्रश्नों का आधार है। इसमें संख्यात्मक और बीजीय भागों को अलग-अलग तोड़ना सीखें।

• यह गुणनखंडन का आधार है। इसमें छोटी-छोटी गलतियाँ पूरे सवाल को गलत कर सकती हैं, इसलिए हर पद को ध्यान से देखें।

• सार्व गुणनखंड विधि के सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर छोटे अंकों के लिए पूछे जाते हैं, इसलिए इसके हर स्टेप को ध्यान से करना ज़रूरी है।

• बोर्ड परीक्षा में, इस विधि के प्रश्न अक्सर 3-4 अंकों के लिए आते हैं। सही समूह बनाना और चिन्हों का ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है।

• यह विषय बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है. इस पर आधारित प्रश्न हर साल पूछे जाते हैं, खासकर जटिल व्यंजकों में दो या तीन सर्वसमिकाओं का एक साथ प्रयोग वाले प्रश्न.

• यह गुणनखंडन का तरीका बोर्ड परीक्षाओं में बहुत महत्वपूर्ण है, खासकर जब सीधे सर्वसमिकाएँ लागू न हों. इसे ध्यान से सीखो और ऋणात्मक संख्याओं के साथ अभ्यास करना मत भूलना.

• एकपदी (monomial) को एकपदी से भाग देते समय, संख्यात्मक गुणांकों (numerical coefficients) को अलग और चर (variables) के घातांकों (powers) को अलग से हल करें.

• यह भाग बोर्ड परीक्षा में छोटे सवालों में ज़रूर आता है, खासकर एकपदी को एकपदी से भाग देने वाला। इसे ध्यान से सीख लो, इसमें नंबर कटने नहीं चाहिए।

• यह प्रश्न अक्सर 2-3 नंबर का आता है, हर पद को सही से भाग करना याद रखें।

• यह विधि बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इसमें गुणनखंडन के सूत्र और सर्वसमिकाएँ भी काम आती हैं, तो उनकी अच्छी तरह तैयारी करें।

एक नज़र में रिवीज़न

› संख्या को छोटे हिस्सों (गुणा) में तोड़ना; अभाज्य = सिर्फ खुद और 1 से भाज्य।
› बीजीय व्यंजकों को अखंडनीय गुणनखंडों में तोड़ना।
› गुणनखंडन: व्यंजक को गुणनफल के रूप में लिखना; आवश्यकता: जटिल व्यंजकों के लिए।
› प्रत्येक पद से उभयनिष्ठ गुणनखंड बाहर निकालें।
› पदों को पुनः समूहित कर सार्व गुणनखंड निकालना।
› $(a\pm b)^2$ और a^2-b^2 सर्वसमकिाओं का उपयोग कर गुणनखंडन करना सीखें.
› अचर पद के गुणनखंड ढूंढो जिनका योग x के गुणांक के बराबर हो।
› विभाजन गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है; घातांक घटते हैं.
› अखंडनीय गुणनखंडों में लिखकर सार्व गुणनखंड निरस्त करें।
› बहुपद के प्रत्येक पद को एकपदी से अलग-अलग भाग दें।
› बहुपद ÷ बहुपद: गुणनखंड करें, उभयनिष्ठ काटें।