गुरुत्वाकर्षण

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» गुरुत्वाकर्षण की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि और गैलीलियो के प्रयोग

प्रश्न 1 (आसान). भू-केंद्रीय मॉडल किसने प्रस्तावित किया था?
उत्तर – टॉलेमी ने।

प्रश्न 2 (आसान). सूर्य-केंद्रीय मॉडल की अवधारणा सबसे पहले किस भारतीय खगोलशास्त्री ने दी थी?
उत्तर – आर्यभट्ट ने।

प्रश्न 3 (मध्यम). गैलीलियो ने अपने प्रयोगों से गुरुत्वाकर्षण के बारे में कौन सा महत्वपूर्ण तथ्य बताया?
उत्तर – उन्होंने बताया कि विभिन्न द्रव्यमान के पिंड पृथ्वी की ओर समान त्वरण से त्वरित होते हैं।

प्रश्न 4 (कठिन). भू-केंद्रीय मॉडल और सूर्य-केंद्रीय मॉडल में मुख्य अंतर क्या था?
उत्तर – भू-केंद्रीय मॉडल में पृथ्वी को ब्रह्मांड का केंद्र माना गया था, जबकि सूर्य-केंद्रीय मॉडल में सूर्य को केंद्र में माना गया था और ग्रह उसके चारों ओर परिक्रमा करते थे।

» केप्लर के ग्रहीय गति के नियम

प्रश्न 5 (आसान). केप्लर के पहले नियम के अनुसार ग्रह किस प्रकार की कक्षा में गति करते हैं?
उत्तर – दीर्घवृत्तीय कक्षा में।

प्रश्न 6 (आसान). सूर्य दीर्घवृत्तीय कक्षा में किस बिंदु पर स्थित होता है?
उत्तर – एक नाभि (focus) पर।

प्रश्न 7 (मध्यम). केप्लर के दूसरे नियम का क्या मतलब है? ग्रह सूर्य के पास तेज क्यों चलते हैं?
उत्तर – केप्लर का दूसरा नियम कहता है कि सूर्य से किसी ग्रह को मिलाने वाली रेखा समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल पार करती है। ग्रह सूर्य के पास तेज चलते हैं क्योंकि उन्हें कम समय में ज्यादा दूरी तय करके उतना ही क्षेत्रफल पार करना होता है।

प्रश्न 8 (कठिन). यदि किसी ग्रह का अर्ध-दीर्घ अक्ष पृथ्वी के अर्ध-दीर्घ अक्ष का 4 गुना है, तो उसका परिक्रमण काल कितने गुना होगा?
उत्तर – केप्लर के तीसरे नियम (T^2 a^3) के अनुसार, T = (a^3)। यदि a 4 गुना है, तो T = (4^3) = 64 = 8 गुना होगा।

» क्षेत्रफलों का नियम: कोणीय संवेग संरक्षण से संबंध

प्रश्न 9 (आसान). कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धांत किस बल के लिए मान्य है?
उत्तर – केंद्रीय बल

प्रश्न 10 (आसान). केप्लर का क्षेत्रफलों का नियम किस भौतिक राशि के संरक्षण का परिणाम है?
उत्तर – कोणीय संवेग

प्रश्न 11 (मध्यम). यदि कोई ग्रह सूर्य के पास आता है, तो उसकी चाल बढ़ जाती है या घट जाती है? क्यों?
उत्तर – बढ़ जाती है, क्योंकि कोणीय संवेग (L = mvr) को नियत रखने के लिए दूरी (r) घटने पर चाल (v) को बढ़ना पड़ता है।

प्रश्न 12 (कठिन). एक धूमकेतु की सूर्य से न्यूनतम दूरी 1 AU (खगोलीय इकाई) है और इस बिंदु पर उसकी चाल 60 km/s है। यदि सूर्य से उसकी अधिकतम दूरी 10 AU है, तो उस अधिकतम दूरी पर धूमकेतु की चाल क्या होगी? (मान लें कि धूमकेतु का द्रव्यमान नियत है)
उत्तर – कोणीय संवेग संरक्षण से: m * r_min * v_min = m * r_max * v_max. द्रव्यमान 'm' कट जाएगा। 1 AU * 60 km/s = 10 AU * v_max. तो v_max = (1 * 60) / 10 = 6 km/s.

» न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम

प्रश्न 13 (आसान). गुरुत्वाकर्षण बल दूरी के साथ कैसे बदलता है?
उत्तर – गुरुत्वाकर्षण बल दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

प्रश्न 14 (आसान). सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक (G) का मान क्या है?
उत्तर – 6.67×10^{11} N m^2/kg^2

प्रश्न 15 (मध्यम). अगर दो वस्तुओं के द्रव्यमान दोगुने कर दिए जाएं, और उनके बीच की दूरी आधी कर दी जाए, तो गुरुत्वाकर्षण बल कितना गुना हो जाएगा?
उत्तर – द्रव्यमान दोगुने होने से बल 4 गुना होगा (2*2), और दूरी आधी होने से बल 4 गुना होगा $(1/(1/2)^2 = 4)$। कुल मिलाकर बल 16 गुना हो जाएगा।

प्रश्न 16 (कठिन). न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम का सदिश रूप लिखिए और उसका क्या मतलब है समझाइए।
उत्तर – $F = -G(mm/r^2) r$। इसका मतलब है कि बल एक सदिश राशि है, और यह दो द्रव्यमानों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगता है। ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि यह बल हमेशा आकर्षी प्रकृति का होता है।

» गुरुत्वीय स्थिरांक (G) और कैवेंडिश प्रयोग

प्रश्न 17 (आसान). गुरुत्वीय स्थिरांक 'G' का SI मात्रक क्या है?
उत्तर – Nm^2/kg^2

प्रश्न 18 (आसान). 'G' का वर्तमान स्वीकृत मान क्या है?
उत्तर – 6.67×10^{11} Nm^2/kg^2

प्रश्न 19 (मध्यम). कैवेंडिश प्रयोग का मुख्य उद्देश्य क्या था?
उत्तर – 'G' का प्रायोगिक मान ज्ञात करना.

प्रश्न 20 (कठिन). अगर दो वस्तुओं के बीच की दूरी दोगुनी कर दी जाए, तो गुरुत्वाकर्षण बल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
उत्तर – बल एक-चौथाई (1/4) हो जाएगा, क्योंकि यह दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है.

» पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण (g)

प्रश्न 21 (आसान). गुरुत्वीय त्वरण 'g' की इकाई क्या है?
उत्तर – m/s^2

प्रश्न 22 (आसान). पृथ्वी की सतह पर 'g' का औसत मान कितना होता है?
उत्तर – लगभग 9.8 m/s^2

प्रश्न 23 (मध्यम). यदि किसी ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का दुगुना हो और उसकी त्रिज्या भी पृथ्वी की त्रिज्या की दुगुनी हो, तो उसकी सतह पर 'g' का मान पृथ्वी के 'g' से कैसे संबंधित होगा?
उत्तर – $g = (2M)/(2R)^2 = 2M/4R^2 = (1/2)\ GM/R^2$, यानी पृथ्वी के g का आधा होगा।

प्रश्न 24 (कठिन). चंद्रमा पर गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान पृथ्वी के g का लगभग 1/6 है। इसका क्या कारण हो सकता है?
उत्तर – चंद्रमा का द्रव्यमान और त्रिज्या पृथ्वी की तुलना में बहुत कम है। सूत्र $g=GM/R^2$ के अनुसार, कम द्रव्यमान और कम त्रिज्या दोनों 'g' के मान को प्रभावित करते हैं, जिससे चंद्रमा पर 'g' का मान पृथ्वी की तुलना में काफी कम हो जाता है।

» ऊंचाई और गहराई के साथ गुरुत्वीय त्वरण में परिवर्तन

प्रश्न 25 (आसान). अगर आप पृथ्वी की सतह से ऊपर जाते हैं, तो गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान पर क्या प्रभाव पड़ता है?
उत्तर – गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान घटता है।

प्रश्न 26 (आसान). अगर आप पृथ्वी की सतह के नीचे गहराई में जाते हैं, तो गुरुत्वीय त्वरण (g) के मान पर क्या प्रभाव पड़ता है?
उत्तर – गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान घटता है।

प्रश्न 27 (मध्यम). पृथ्वी के केंद्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान कितना होता है?
उत्तर – पृथ्वी के केंद्र पर गुरुत्वीय त्वरण का मान शून्य (0) होता है।

प्रश्न 28 (कठिन). पृथ्वी की सतह पर एक वस्तु का भार 60 N है। पृथ्वी की सतह से 3200 km की ऊँचाई पर इसका भार कितना होगा? (R_E = 6400 km)
उत्तर – सतह पर भार = mg = 60 N, तो m = 60/g. ऊँचाई पर g_h = g (1 - 2h/R_E) = g (1 - 2∗3200/6400) = g (1 - 1) = 0. अतः ऊँचाई पर भार = m∗g_h = m∗0 = 0 N।

» गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

प्रश्न 29 (आसान). यदि किसी वस्तु को अनंत पर रखा जाए, तो उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कितनी होगी?
उत्तर – शून्य (0)

प्रश्न 30 (आसान). गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का SI मात्रक क्या है?
उत्तर – जूल (Joule)

प्रश्न 31 (मध्यम). पृथ्वी की सतह पर एक 10 kg द्रव्यमान की वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा क्या होगी? (पृथ्वी का द्रव्यमान M_E = 6 x 10^24 kg, पृथ्वी की त्रिज्या R_E = 6.4 x 10^6 m, G = 6.67 x 10^-11 Nm^2/kg^2)
उत्तर – U = -GM_E ∗ m / R_E = -(6.67 x 10^-11 ∗ 6 x 10^24 ∗ 10) / (6.4 x 10^6) = -6.25 x 10^8 जूल

प्रश्न 32 (कठिन). तीन कण, प्रत्येक का द्रव्यमान 'm', एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर रखे हैं, जिसकी भुजा की लंबाई 'a' है। इस निकाय की कुल गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।
उत्तर – निकाय में 3 युग्म बनेंगे (प्रत्येक भुजा के लिए एक)। प्रत्येक युग्म की ऊर्जा = -G m^2 / a। तो कुल ऊर्जा = 3 ∗ (-G m^2 / a) = -3Gm^2/a।

» पलायन चाल

प्रश्न 33 (आसान). यदि किसी वस्तु की पलायन चाल 15 km/s है, तो इसका क्या अर्थ है?
उत्तर – इसका अर्थ है कि वस्तु को उस ग्रह से बाहर निकलने के लिए कम से कम 15 km/s की चाल चाहिए।

प्रश्न 34 (आसान). क्या पलायन चाल वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करती है?
उत्तर – नहीं, पलायन चाल वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है, केवल ग्रह के द्रव्यमान और त्रिज्या पर।

प्रश्न 35 (मध्यम). चंद्रमा की सतह पर गुरुत्वाकर्षण पृथ्वी से कम है। क्या चंद्रमा पर पलायन चाल पृथ्वी से अधिक होगी या कम?
उत्तर – चंद्रमा पर पलायन चाल पृथ्वी से कम होगी, क्योंकि चंद्रमा का द्रव्यमान और त्रिज्या दोनों पृथ्वी से कम हैं, जिससे गुरुत्वाकर्षण भी कम होता है।

प्रश्न 36 (कठिन). यदि एक ब्लैक होल का द्रव्यमान बहुत अधिक है और त्रिज्या बहुत कम है, तो उसकी पलायन चाल क्या होगी?
उत्तर – एक ब्लैक होल की पलायन चाल प्रकाश की चाल से भी अधिक होती है, इसलिए प्रकाश भी उससे बाहर नहीं निकल पाता है।

» भू-उपग्रह: गति और आवर्तकाल

प्रश्न 37 (आसान). भू-उपग्रह किसे कहते हैं?
उत्तर – वे पिंड जो पृथ्वी के चारों ओर एक निश्चित कक्षा में परिक्रमण करते हैं।

प्रश्न 38 (आसान). पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह कौन सा है?
उत्तर – चंद्रमा।

प्रश्न 39 (मध्यम). एक भू-उपग्रह की चाल किस पर निर्भर करती है: उसके अपने द्रव्यमान पर या पृथ्वी के द्रव्यमान पर?
उत्तर – पृथ्वी के द्रव्यमान पर और उसकी कक्षा की त्रिज्या पर, उसके अपने द्रव्यमान पर नहीं।

प्रश्न 40 (कठिन). यदि एक भू-उपग्रह की कक्षा की ऊँचाई बढ़ाई जाए, तो उसकी कक्षीय चाल और आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
उत्तर – ऊँचाई बढ़ने पर कक्षीय चाल घट जाएगी और आवर्तकाल बढ़ जाएगा।

» कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा

प्रश्न 41 (आसान). यदि किसी उपग्रह की गतिज ऊर्जा 500 J है, तो उसकी स्थितिज ऊर्जा कितनी होगी?
उत्तर – -1000 J

प्रश्न 42 (आसान). उपग्रह की कुल ऊर्जा धनात्मक होने पर क्या होगा?
उत्तर – उपग्रह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र से बाहर निकल जाएगा।

प्रश्न 43 (मध्यम). एक उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या 2R_E है। उसकी गतिज ऊर्जा का सूत्र क्या होगा?
उत्तर – KE = GMm / (4R_E)

प्रश्न 44 (कठिन). यदि एक उपग्रह को R_E त्रिज्या की कक्षा से 2R_E त्रिज्या की कक्षा में ले जाना हो, तो आवश्यक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा?
उत्तर – आवश्यक ऊर्जा में परिवर्तन = GMm / (4R_E)

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. गैलीलियो ने पीसा की झुकी हुई मीनार से प्रयोग करते हुए क्या सिद्ध किया था?

› गैलीलियो ने यह सिद्ध करने का प्रयास किया कि पृथ्वी की गुरुत्वाकर्षण शक्ति सभी वस्तुओं पर समान रूप से कार्य करती है, चाहे उनका द्रव्यमान कुछ भी हो।

› उन्होंने दो अलग-अलग द्रव्यमान की वस्तुओं को मीनार से एक ही समय पर गिराया।

› परिणामस्वरूप, दोनों वस्तुएं (हवा के प्रतिरोध को नगण्य मानते हुए) लगभग एक ही समय पर ज़मीन पर पहुँचीं।

उत्तर – गैलीलियो ने सिद्ध किया कि सभी पिंड, चाहे उनका द्रव्यमान कुछ भी हो, पृथ्वी की ओर एक समान त्वरण से त्वरित होते हैं।

उदाहरण 2. मान लीजिए पृथ्वी का अर्ध-दीर्घ अक्ष (a) 1 AU है और परिक्रमण काल (T) 1 वर्ष है। यदि मंगल ग्रह का अर्ध-दीर्घ अक्ष 1.52 AU है, तो उसका परिक्रमण काल कितना होगा?

› केप्लर के तीसरे नियम से, T^2 a^3, या T^2/a^3 = स्थिरांक।

› पृथ्वी के लिए: $T_पृथ्वी^2 / a_पृथ्वी^3 = 1^2 / 1^3 = 1$।

› मंगल के लिए: $T_मंगल^2 / a_मंगल^3 = 1$।

› तो, $T_मंगल^2 = a_मंगल^3$।

› $T_मंगल^2 = (1.52)^3 = 3.511808$।

› T_मंगल = 3.511808 1.87 वर्ष।

उत्तर – मंगल ग्रह का परिक्रमण काल लगभग 1.87 वर्ष होगा।

उदाहरण 3. मान लीजिए एक ग्रह सूर्य के सबसे पास (उपसौर) पर है, जहाँ उसकी सूर्य से दूरी r_p = 1.0 x 10^11 मीटर है और चाल v_p = 3.0 x 10^4 मीटर/सेकंड है। जब यह ग्रह सूर्य से सबसे दूर (अपसौर) पर है, जहाँ उसकी दूरी r_a = 1.5 x 10^11 मीटर है, तो अपसौर पर उसकी चाल (v_a) क्या होगी?

› हमें कोणीय संवेग संरक्षण का नियम लगाना होगा। 'कोणीय संवेग उपसौर पर = कोणीय संवेग अपसौर पर' होता है।

› सूत्र है: 'm * r_p * v_p = m * r_a * v_a' (जहाँ 'm' ग्रह का द्रव्यमान है, जो दोनों तरफ कट जाएगा)।

› अब मान रखते हैं: (1.0 x 10^11 मी) * (3.0 x 10^4 मी/से) = (1.5 x 10^11 मी) * v_a

› v_a = [(1.0 x 10^11) * (3.0 x 10^4)] / (1.5 x 10^11)

› v_a = (3.0 x 10^15) / (1.5 x 10^11)

› v_a = 2.0 x 10^4 मीटर/सेकंड

उत्तर – अपसौर पर ग्रह की चाल 2.0 x 10^4 मीटर/सेकंड होगी।

उदाहरण 4. दो वस्तुएं हैं जिनका द्रव्यमान क्रमशः 5 kg और 10 kg है। उनके केंद्रों के बीच की दूरी 2 मीटर है। उनके बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल की गणना कीजिए। (G = 6.67 × 10^{11} N m^2/kg^2)

› सबसे पहले हमें दिए गए मान लिखने होंगे: m = 5 kg, m = 10 kg, r = 2 m, और G = 6.67 × 10^{11} N m^2/kg^2।

› अब, हम सूत्र का उपयोग करेंगे: F = G (mm / r^2)।

› इसमें मान रखेंगे: F = (6.67 × 10^{11}) × (5 × 10) / (2^2)।

› F = (6.67 × 10^{11}) × 50 / 4।

› F = (6.67 × 10^{11}) × 12.5।

› F = 83.375 × 10^{11} N या 8.3375 × 10^1 N।

उत्तर – उनके बीच लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल 8.3375 × 10^1 N है।

उदाहरण 5. दो वस्तुएँ हैं, एक का द्रव्यमान 1 kg है और दूसरी का 2 kg है. उनके केंद्रों के बीच की दूरी 1 मीटर है. उनके बीच गुरुत्वाकर्षण बल ज्ञात कीजिए, जहाँ G = 6.67 x 10^{11} Nm^2/kg^2 है.

› गुरुत्वाकर्षण बल का सूत्र है: F = G (mm / r^2)

› दिए गए मानों को सूत्र में रखेंगे: G = 6.67 x 10^{11} Nm^2/kg^2, m = 1 kg, m = 2 kg, r = 1 m

› F = (6.67 x 10^{11}) * (1 * 2) / $(1)^2$

› F = (6.67 x 10^{11}) * 2 / 1

› F = 13.34 x 10^{11} N

उत्तर – उनके बीच गुरुत्वाकर्षण बल 13.34 x 10^{11} न्यूटन है.

उदाहरण 6. यदि पृथ्वी का द्रव्यमान (M) लगभग 5.97 x 10^24 kg और पृथ्वी की त्रिज्या (R) लगभग 6.37 x 10^6 m है, तो पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान ज्ञात कीजिए। (G = 6.67 x 10^{11} Nm^2/kg^2)

› हमें सूत्र पता है: g = GM/R^2

› सभी मानों को सूत्र में रखेंगे: g = (6.67 x 10^{11} Nm^2/kg^2) * (5.97 x 10^24 kg) / (6.37 x 10^6 m)^2

› पहले त्रिज्या का वर्ग करेंगे: (6.37 x 10^6)^2 = 40.5769 x 10^12 m^2

› अब ऊपर वाले मानों को गुणा करेंगे: (6.67 x 5.97) x (10^{11} x 10^24) = 39.8199 x 10^13

› भाग करेंगे: g = (39.8199 x 10^13) / (40.5769 x 10^12)

› घातांक को समायोजित करेंगे और गणना करेंगे: g = (39.8199 / 40.5769) x (10^13 / 10^12) = 0.9813 x 10^1

› इसे सरल करेंगे: g = 9.813 m/s^2

उत्तर – पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान लगभग 9.81 m/s^2 है।

उदाहरण 7. पृथ्वी की सतह से 640 km की ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करें। (पृथ्वी की त्रिज्या R_E = 6400 km, सतह पर g = 9.8 m/s²)

› हमें ऊंचाई (h) दी गई है 640 km और पृथ्वी की त्रिज्या (R_E) 6400 km है।

› ऊंचाई के साथ गुरुत्वीय त्वरण का सूत्र है: g_h = g (1 - 2h/R_E)

› मान रखेंगे: g_h = 9.8 (1 - (2 * 640) / 6400)

› सरल करेंगे: g_h = 9.8 (1 - 1280 / 6400)

› g_h = 9.8 (1 - 0.2)

› g_h = 9.8 * 0.8

› g_h = 7.84 m/s²

उत्तर – ऊंचाई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 7.84 m/s² होगा।

उदाहरण 8. दो कण, जिनके द्रव्यमान क्रमशः m1 = 2 kg और m2 = 3 kg हैं, एक दूसरे से 5 मीटर की दूरी पर रखे हैं। उनके गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की गणना कीजिए। (G = 6.67 x 10^-11 Nm^2/kg^2)

› हमें दिया गया है: m1 = 2 kg, m2 = 3 kg, r = 5 m, G = 6.67 x 10^-11 Nm^2/kg^2।

› गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का सूत्र है: U = -GMm/r।

› अब हम इसमें मान रखेंगे: U = -(6.67 x 10^-11 * 2 * 3) / 5।

› गुणा करने पर: U = -(40.02 x 10^-11) / 5।

› भाग देने पर: U = -8.004 x 10^-11 J।

उत्तर – गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा = -8.004 x 10^-11 जूल (J)

उदाहरण 9. पृथ्वी के लिए पलायन चाल की गणना करें, यदि पृथ्वी का द्रव्यमान (M) = 6 × 10² kg और त्रिज्या (R) = 6.4 × 10 m है। (सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक G = 6.67 × 10¹¹ N m²/kg²)

› पलायन चाल का सूत्र है: Ve = (2GM/R)

› दिए गए मानों को सूत्र में रखें: Ve = (2 × 6.67 × 10¹¹ N m²/kg² × 6 × 10² kg / 6.4 × 10 m)

› गुणा और भाग करें: Ve = (12 × 6.67 × 10¹³ / 6.4 × 10)

› Ve = (80.04 × 10 / 6.4) = (12.50625 × 10)

› Ve = (125.0625 × 10) = 11.18 × 10³ m/s

उत्तर – पृथ्वी के लिए पलायन चाल लगभग 11.2 किलोमीटर प्रति सेकंड (km/s) है।

उदाहरण 10. एक भू-उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से 3600 km की ऊँचाई पर वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या (RE) 6400 km और पृथ्वी का द्रव्यमान (ME) 6 x 10^24 kg हो, और गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक (G) 6.67 x 10^-11 Nm²/kg² हो, तो उपग्रह की कक्षीय चाल (orbital speed) ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, पृथ्वी के केंद्र से उपग्रह की कुल दूरी (RE + h) निकालो। यहाँ RE = 6400 km और h = 3600 km है। तो (6400 + 3600) km = 10000 km = 10 x 10^6 m हो गया।

› अब चाल का सूत्र लगाओ: V = (G ME / (RE + h))।

› सारी वैल्यूज़ रखो: V = ((6.67 x 10^-11 Nm²/kg²) x (6 x 10^24 kg) / (10 x 10^6 m))।

› इसे हल करने पर आपको मिलेगा: V = (40.02 x 10^13 / 10 x 10^6) = (4.002 x 10^7) m/s।

› वर्गमूल निकालने पर V 6.32 x 10^3 m/s या 6.32 km/s मिलता है।

उत्तर – उपग्रह की कक्षीय चाल लगभग 6.32 किलोमीटर प्रति सेकंड (6.32 km/s) है।

उदाहरण 11. एक 100 kg द्रव्यमान का उपग्रह पृथ्वी की सतह से 3R_E (पृथ्वी की त्रिज्या का तीन गुना) ऊँचाई पर वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। उसकी कुल ऊर्जा ज्ञात कीजिए। (G = 6.67 x 10^-11 Nm²/kg², M_E = 6 x 10^24 kg, R_E = 6.4 x 10^6 m)

› हमें उपग्रह का द्रव्यमान m = 100 kg दिया गया है।

› ऊँचाई h = 3R_E दी गई है, तो (R_E + h) = R_E + 3R_E = 4R_E।

› अब, R_E का मान 6.4 x 10^6 m है, तो (R_E + h) = 4 x 6.4 x 10^6 m = 25.6 x 10^6 m।

› कुल ऊर्जा का सूत्र है: E = -GMm / 2(R_E + h) लगाना है।

› सभी मानों को सूत्र में रखने पर: E = -(6.67 x 10^-11 Nm²/kg² ∗ 6 x 10^24 kg ∗ 100 kg) / (2 ∗ 25.6 x 10^6 m)।

› गणना करने पर: E = -(400.2 x 10^13) / (51.2 x 10^6) J।

› तो E = -7.816 x 10^9 J।

उत्तर – उपग्रह की कुल ऊर्जा E = -7.816 x 10^9 जूल है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• गैलीलियो के प्रयोग और भू-केंद्रीय/सूर्य-केंद्रीय मॉडल के बीच के अंतर को स्पष्ट रूप से समझो, ये अक्सर एक या दो नंबर के प्रश्न में पूछा जाता है।

• केप्लर के तीनों नियमों का सही 'कथन' (statement) और 'सूत्र' (formula) याद रखना बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर सीधे सवाल आते हैं।

• यह नियम 'प्रिंसिपिया' नामक प्रसिद्ध ग्रंथ में दिया गया था, यह एक महत्वपूर्ण ऐतिहासिक तथ्य है। इसका गणितीय सूत्र, सदिश रूप, और G का मान बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर पूछा जाता है।

• गुरुत्वीय स्थिरांक 'G' का मान और इसका SI मात्रक, दोनों ही बोर्ड परीक्षाओं में 'objective type questions' के लिए बहुत महत्वपूर्ण हैं. 'Cavendish experiment' का नाम भी याद रखना.

• गुरुत्वीय त्वरण (g) और सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक (G) के बीच अंतर और उनके सूत्रों को याद रखना बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इनकी इकाइयों को भी ध्यान से देखें।

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं में बहुत महत्वपूर्ण है। ऊँचाई और गहराई दोनों के सूत्रों को अच्छे से याद रखना और उन पर आधारित आंकिक प्रश्नों (numerical problems) को हल करने का अभ्यास करना।

• यह सूत्र, U = -GMm/r, बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे प्रश्न और निकाय की कुल ऊर्जा के प्रश्न अक्सर आते हैं। माइनस चिन्ह का ध्यान ज़रूर रखना।

• पलायन चाल के सूत्र और उसकी निर्भरता पर आधारित न्यूमेरिकल प्रश्न बोर्ड परीक्षा में अक्सर आते हैं, इसलिए सूत्र को अच्छी तरह याद कर लें और गणना का अभ्यास करें।

• भू-उपग्रहों की चाल और आवर्तकाल के सूत्रों पर आधारित संख्यात्मक प्रश्न (numerical problems) बोर्ड परीक्षा में अक्सर आते हैं, इसलिए सूत्रों को याद करके अच्छे से अभ्यास करें।

• यह कॉन्सेप्ट बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। गतिज, स्थितिज और कुल ऊर्जा के सूत्र और उनके बीच का संबंध अक्सर पूछा जाता है। ध्यान रखें कि कुल ऊर्जा हमेशा ऋणात्मक होती है, और 'KE = |PE| / 2' को याद रखें।

एक नज़र में रिवीज़न

› टॉलेमी (भू-केंद्रीय), आर्यभट्ट/कोपरनिकस (सूर्य-केंद्रीय), गैलीलियो (समान त्वरण)

› केप्लर के 3 नियम: दीर्घवृतीय कक्षा (सूर्य नाभि पर), समान क्षेत्रफल समान समय, T^2 a^3

› F = G (mm / r^2), बल आकर्षी, द्रव्यमान F, दूरी² 1/F

› गुरुत्वीय स्थिरांक 'G': सार्वत्रिक, कैवेंडिश ने मापा, मान $6.67x10^{11}$ Nm^2/kg^2.

› पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण (g) = GM/R^2, मान ~9.8 m/s^2

› ऊँचाई (h) और गहराई (d) दोनों में गुरुत्वीय त्वरण (g) घटता है।

› गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा U = -GMm/r; अनंत पर शून्य; हमेशा ऋणात्मक।

› न्यूनतम चाल जिससे वस्तु गुरुत्वाकर्षण से बाहर निकले; Ve = (2GM/R)।

› भू-उपग्रह: चाल V = (GME/R), आवर्तकाल T^2 R^3। V, 'm' पर निर्भर नहीं।

› उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है (E = -GMm / 2(R_E + h))।