

सांख्यिकी

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» सांख्यिकी और प्रकीर्णन की आवश्यकता

प्रश्न 1 (आसान). केंद्रीय प्रवृत्ति की किन्हीं दो मापों के नाम बताइए।

उत्तर – माध्य (Mean) और माध्यिका (Median).

प्रश्न 2 (आसान). अगर किसी आँकड़ों के समूह का माध्य 25 है, तो क्या इसका मतलब है कि सभी मान 25 के आस-पास होंगे?

उत्तर – नहीं, ऐसा ज़रूरी नहीं है. मान बहुत ज़्यादा बिखरे हुए भी हो सकते हैं.

प्रश्न 3 (मध्यम). प्रकीर्णन की आवश्यकता क्यों पड़ती है? एक वाक्य में समझाइए।

उत्तर – प्रकीर्णन की आवश्यकता आँकड़ों में फैलाव या बिखराव को मापने के लिए पड़ती है, क्योंकि केंद्रीय प्रवृत्ति की मापें अकेले पूरी जानकारी नहीं देती।

प्रश्न 4 (कठिन). दो गाँव में औसत मासिक आय ₹8000 है. गाँव X की आय 5000, 7000, 9000, 11000 है, जबकि गाँव Y की आय 7500, 8000, 8500, 8000 है. केंद्रीय प्रवृत्ति और प्रकीर्णन के आधार पर कौन-सा गाँव ज़्यादा आर्थिक रूप से स्थिर है?

उत्तर – दोनों गाँवों की औसत मासिक आय (माध्य) ₹8000 है. लेकिन गाँव X की आय में प्रकीर्णन ज़्यादा है (5000 से 11000 तक), जबकि गाँव Y की आय में प्रकीर्णन बहुत कम है (7500 से 8500 तक). इसलिए, गाँव Y आर्थिक रूप से ज़्यादा स्थिर है.

» प्रकीर्णन की माप के प्रकार

प्रश्न 5 (आसान). प्रकीर्णन की माप के चार मुख्य प्रकारों के नाम बताओ.

उत्तर – परिसर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, मानक विचलन.

प्रश्न 6 (आसान). इस अध्याय में हम प्रकीर्णन की कौन सी माप का अध्ययन नहीं करेंगे?

उत्तर – चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) का.

प्रश्न 7 (मध्यम). प्रकीर्णन की माप क्यों आवश्यक है? क्या सिर्फ केंद्रीय प्रवृत्ति की माप पर्याप्त नहीं है?

उत्तर – नहीं, सिर्फ केंद्रीय प्रवृत्ति की माप पर्याप्त नहीं है क्योंकि यह आँकड़ों के फैलाव या बिखराव के बारे में जानकारी नहीं देती. प्रकीर्णन की माप हमें यह जानने में मदद करती है कि आँकड़े केंद्रीय मान के आसपास कितने फैले हुए हैं, जिससे हम बेहतर निष्कर्ष निकाल सकें.

प्रश्न 8 (कठिन). कल्पना करो कि दो कंपनियों का औसत लाभ एक समान है. प्रकीर्णन की माप हमें इन दोनों कंपनियों के बारे में क्या अतिरिक्त जानकारी दे सकती है?

उत्तर – यदि दोनों कंपनियों का औसत लाभ समान है, तो प्रकीर्णन की माप हमें यह बता सकती है कि किस कंपनी का लाभ अधिक स्थिर या लगातार है और किसमें अधिक उतार-चढ़ाव (बिखराव) है. कम प्रकीर्णन वाली कंपनी का लाभ अधिक विश्वसनीय माना जाएगा.

» परिसर (Range)

प्रश्न 9 (आसान). दिए गए डेटा सेट का परिसर ज्ञात करें: 5, 12, 8, 15, 3।

उत्तर – $15 - 3 = 12$

प्रश्न 10 (आसान). एक गाँव में परिवारों की संख्या: 2, 6, 4, 3, 5, 1। परिसर क्या है?

उत्तर – $6 - 1 = 5$

प्रश्न 11 (मध्यम). एक दुकान पर पिछले 7 दिनों की बिक्री (हज़ार में): 15, 22, 18, 30, 12, 25, 10। परिसर ज्ञात करें।

उत्तर – $30 - 10 = 20$ (हज़ार)

प्रश्न 12 (कठिन). यदि किसी डेटा सेट का अधिकतम मान 120 है और परिसर 75 है, तो न्यूनतम मान क्या होगा?

उत्तर – न्यूनतम मान = अधिकतम मान - परिसर = $120 - 75 = 45$

» माध्य विचलन: मूल बातें और गणना (अवर्गीकृत आँकड़े)

प्रश्न 13 (आसान). आँकड़ों 2, 4, 6 के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर – माध्य = $(2+4+6)/3 = 4$ । विचलन: $|2-4|=2$, $|4-4|=0$, $|6-4|=2$ । माध्य विचलन = $(2+0+2)/3 = 4/3 = 1.33$

प्रश्न 14 (आसान). अगर एक सेट के मान {5, 5, 5} हैं, तो माध्य विचलन क्या होगा?

उत्तर – माध्य = 5। विचलन: $|5-5|=0$, $|5-5|=0$, $|5-5|=0$ । माध्य विचलन = $(0+0+0)/3 = 0$

प्रश्न 15 (मध्यम). आँकड़ों 10, 20, 30, 40 के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर – माध्य = $(10+20+30+40)/4 = 25$ । विचलन: $|10-25|=15$, $|20-25|=5$, $|30-25|=5$, $|40-25|=15$ । माध्य विचलन = $(15+5+5+15)/4 = 40/4 = 10$

प्रश्न 16 (कठिन). आँकड़ों 3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21 के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर – आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें: 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21। माध्यिका = 11 प्रेक्षणों में 6वाँ प्रेक्षण = 9। विचलन: $|3-9|=6$, $|3-9|=6$, $|4-9|=5$, $|5-9|=4$, $|7-9|=2$, $|9-9|=0$, $|10-9|=1$, $|12-9|=3$, $|18-9|=9$, $|19-9|=10$, $|21-9|=12$ । विचलनों का योग = $6+6+5+4+2+0+1+3+9+10+12 = 58$ । माध्य विचलन = $58/11 = 5.27$

» माध्य विचलन: गणना (असतत बारंबारता बंटन)

प्रश्न 17 (आसान). अगर $x_i = [1, 2, 3]$ और $f_i = [2, 3, 1]$ है, तो माध्य ($\bar{x}$) ज्ञात करें।

उत्तर – $\bar{x} = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) / (2+3+1) = (2+6+3)/6 = 11/6 = 1.83$ (लगभग)

प्रश्न 18 (आसान). ऊपर दिए गए आँकड़ों के लिए, x_i का माध्य से विचलन ($|x_i - \bar{x}|$) ज्ञात करें।

उत्तर – $|1 - 1.83| = 0.83$, $|2 - 1.83| = 0.17$, $|3 - 1.83| = 1.17$

प्रश्न 19 (मध्यम). निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए: $x_i = [10, 20, 30]$, $f_i = [3, 5, 2]$

उत्तर – पहले माध्य $\bar{x} = (10 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 2) / (3+5+2) = (30+100+60)/10 = 190/10 = 19$ । फिर $f_i|x_i - \bar{x}|$ का योग: $3 \cdot |10-19| + 5 \cdot |20-19| + 2 \cdot |30-19| = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 11 = 27 + 5 + 22 = 54$ । माध्य विचलन = $54/10 = 5.4$

प्रश्न 20 (कठिन). माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करें: $x_i = [3, 6, 9, 12, 13, 15]$, $f_i = [3, 4, 5, 2, 4, 5]$

उत्तर – कुल बारंबारता $f_i = 23$ । माध्यिका के लिए, $N/2 = 23/2 = 11.5$ वाँ प्रेक्षण। संचयी बारंबारता (cf): 3, 7, 12, 14, 18, 23। 11.5वाँ प्रेक्षण $cf = 12$ में आता है, जिसका $x_i = 9$ है। तो माध्यिका $M = 9$ । अब $f_i|x_i - M|$ का योग: $3 \cdot |3-9| + 4 \cdot |6-9| + 5 \cdot |9-9| + 2 \cdot |12-9| + 4 \cdot |13-9| + 5 \cdot |15-9| = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 18 + 12 + 0 + 6 + 16 + 30 = 82$ । माध्य विचलन = $82/23 = 3.57$ (लगभग)

» माध्य विचलन: गणना (सतत बारंबारता बंटन)

प्रश्न 21 (आसान). वर्ग: 0-10 ($f_i=5$), 10-20 ($f_i=5$)। माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन के लिए पहला x_i क्या होगा?

उत्तर – 5

प्रश्न 22 (आसान). माध्यिका वर्ग वह वर्ग होता है जिसकी संचयी बारंबारता $N/2$ से _____ होती है। (खाली स्थान भरें)

उत्तर – बराबर या थोड़ी अधिक

प्रश्न 23 (मध्यम). वर्ग: 0-20 ($f_i=10$), 20-40 ($f_i=20$), 40-60 ($f_i=10$)। माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 10

प्रश्न 24 (कठिन). वर्ग: 0-10 ($f_i=6$), 10-20 ($f_i=7$), 20-30 ($f_i=15$), 30-40 ($f_i=16$), 40-50 ($f_i=4$), 50-60 ($f_i=2$)। माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए। (माध्यिका = 28)

उत्तर – 10.16

» माध्य विचलन की परिसीमाएँ

प्रश्न 25 (आसान). माध्य विचलन 'बीजगणितीय गणनाओं' के लिए क्यों उपयुक्त नहीं है?

उत्तर – क्योंकि हम विचलनों के 'निरपेक्ष मान' (absolute values) का उपयोग करते हैं, जिससे ऋणात्मक चिह्न हट जाते हैं और बीजगणितीय 'properties' का पालन नहीं होता।

प्रश्न 26 (आसान). अगर एक 'डेटा सीरीज़' में बहुत अधिक 'फैलाव' या 'विचरण' हो, तो माध्य विचलन पर पूरी तरह से क्यों 'भरोसा' नहीं कर सकते?

उत्तर – ऐसी स्थिति में, एक 'सिंगल आउटलायर' या 'एक्सट्रीम वैल्यू' माध्य विचलन को बहुत बढ़ा या घटा सकती है, जिससे वह 'डेटा' के वास्तविक 'बिखराव' को सही से 'represent' नहीं कर पाता।

प्रश्न 27 (मध्यम). आपके अनुसार, माध्य विचलन की 'सीमाओं' को देखते हुए, प्रकीर्णन की कौन सी 'माप' अधिक 'वैज्ञानिक' मानी जाती है और क्यों?

उत्तर – प्रसरण (Variance) और मानक विचलन (Standard Deviation) अधिक वैज्ञानिक माने जाते हैं क्योंकि वे विचलनों के 'वर्गों' का उपयोग करते हैं, जिससे 'चिह्नों' की समस्या दूर हो जाती है और वे 'बीजगणितीय गणनाओं' के लिए उपयुक्त होते हैं।

» प्रसरण (Variance)

प्रश्न 28 (आसान). डेटा सेट 2, 4, 6 के लिए प्रसरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $8/3$ या 2.67

प्रश्न 29 (आसान). अगर किसी डेटा सेट का माध्य 5 है और प्रेक्षण 3, 5, 7 हैं, तो प्रसरण क्या होगा?

उत्तर – $8/3$ या 2.67

प्रश्न 30 (मध्यम). निम्नलिखित डेटा के लिए प्रसरण ज्ञात कीजिए: 1, 3, 5, 7, 9

उत्तर – 8

प्रश्न 31 (कठिन). एक कक्षा में 5 छात्रों के टेस्ट स्कोर हैं: 70, 75, 80, 85, 90। इस डेटा का प्रसरण क्या होगा?

उत्तर – 50

» मानक विचलन (Standard Deviation)

प्रश्न 32 (आसान). यदि किसी डेटा का प्रसरण 36 है, तो उसका मानक विचलन क्या होगा?

उत्तर – 6

प्रश्न 33 (आसान). अगर माध्य से विचलनों के वर्गों का योग 100 है और प्रेक्षणों की संख्या 4 है, तो मानक विचलन क्या होगा?

उत्तर – 5

प्रश्न 34 (मध्यम). आंकड़ों 3, 5, 7, 9, 11 के लिए मानक विचलन ज्ञात करें।

उत्तर – (8) 2.828

प्रश्न 35 (कठिन). किसी डेटा सेट का माध्य 15 है और मानक विचलन 3 है। अगर डेटा के हर प्रेक्षण में 2 जोड़ दिया जाए, तो नया मानक विचलन क्या होगा?

उत्तर – 3 (मानक विचलन नहीं बदलेगा क्योंकि डेटा का फैलाव वही रहता है)

» प्रसरण और मानक विचलन: गणना (असतत बारंबारता बंटन)

प्रश्न 36 (आसान). अगर $x_i = \{5, 10, 15\}$ और $f_i = \{2, 3, 1\}$ है, तो कुल बारंबारता (N) क्या होगी?

उत्तर – $N = 2 + 3 + 1 = 6$

प्रश्न 37 (आसान). ऊपर दिए गए आँकड़ों के लिए $(f_i * x_i)$ का योग क्या होगा?

उत्तर – $(2*5) + (3*10) + (1*15) = 10 + 30 + 15 = 55$

प्रश्न 38 (मध्यम). दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य की गणना करें: $x_i = \{10, 20, 30, 40\}$, $f_i = \{2, 4, 3, 1\}$

उत्तर – माध्य $(\bar{x}) = [(10*2) + (20*4) + (30*3) + (40*1)] / (2+4+3+1) = (20 + 80 + 90 + 40) / 10 = 230 / 10 = 23$

प्रश्न 39 (कठिन). $x_i = \{1, 2, 3\}$, $f_i = \{1, 2, 1\}$ के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर – पहले माध्य निकालो: $\bar{x} = [(1*1) + (2*2) + (3*1)] / (1+2+1) = (1+4+3)/4 = 8/4 = 2$

फिर $(x_i - \bar{x})^2$ निकालो: $(1-2)^2=1$, $(2-2)^2=0$, $(3-2)^2=1$

फिर $f_i * (x_i - \bar{x})^2$ निकालो: $(1*1)=1$, $(2*0)=0$, $(1*1)=1$

योग = $1+0+1 = 2$

प्रसरण $(^2) = 2 / 4 = 0.5$

मानक विचलन $(\sigma) = 0.5 \quad 0.7071$

» प्रसरण और मानक विचलन: गणना (सतत बारंबारता बंटन)

प्रश्न 40 (आसान). वर्ग अंतराल '10-20' का मध्य-बिंदु ज्ञात करें।

उत्तर – 15

प्रश्न 41 (आसान). यदि किसी वर्ग का मध्य-बिंदु 50 है और बारंबारता 5 है, तो fx क्या होगा?

उत्तर – 250

प्रश्न 42 (मध्यम). निम्नलिखित सतत बारंबारता बंटन के लिए fx ज्ञात करें: वर्ग: 0-10 ($f=2$), 10-20 ($f=4$), 20-30 ($f=3$)

उत्तर – मध्य-बिंदु: 5, 15, 25. $fx = (2*5) + (4*15) + (3*25) = 10 + 60 + 75 = 145$

प्रश्न 43 (कठिन). एक सतत बंटन में $f = 100$, $fx = 2500$, $fx^2 = 65000$ है। इसका प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करें।

उत्तर – माध्य $(\bar{x}) = 2500/100 = 25$. प्रसरण $(^2) = (65000/100) - (25)^2 = 650 - 625 = 25$. मानक विचलन $(\sigma) = 25 = 5$

» प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करने की लघु विधि

प्रश्न 44 (आसान). यदि $A=25$, $h=5$, $fy=100$ और $N=50$, तो माध्य $(\bar{x})$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\bar{x} = 25 + 5 * (100/50) = 25 + 5 * 2 = 35$

प्रश्न 45 (आसान). अगर $h=10$, $^2y = 2.5$, तो प्रसरण (2) क्या होगा?

उत्तर – $^2 = h^2 * ^2y = 10^2 * 2.5 = 100 * 2.5 = 250$

प्रश्न 46 (मध्यम). वर्ग: 0-10, 10-20, 20-30; f: 2, 5, 3। $A=15$, $h=10$ मानकर y निकालो और fy ज्ञात करो।

उत्तर – x : 5, 15, 25; y : $(5-15)/10 = -1$, $(15-15)/10 = 0$, $(25-15)/10 = 1$; fy : $2*(-1)=-2$, $5*0=0$, $3*1=3$;
 $fy = -2+0+3 = 1$

प्रश्न 47 (कठिन). एक बंटन में $N=100$, $A=50$, $h=10$, $fy = -20$, $fy^2 = 200$ है। प्रसरण (2) और मानक विचलन () ज्ञात कीजिए।

उत्तर – प्रसरण (2) = $10^2 * [(1/100)*200 - ((-20)/100)^2] = 100 * [2 - (-0.2)^2] = 100 * [2 - 0.04] = 100 * 1.96 = 196$ । मानक विचलन () = $\sqrt{196} = 14$ ।

» प्रसरण और मानक विचलन पर परिवर्तन का प्रभाव

प्रश्न 48 (आसान). कुछ प्रेक्षणों का मानक विचलन 5 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण में 7 जोड़ दिया जाए, तो नया मानक विचलन क्या होगा?

उत्तर – 5 (मानक विचलन अपरिवर्तित रहेगा)

प्रश्न 49 (आसान). 10 प्रेक्षणों का प्रसरण 16 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण में से 2 घटा दिया जाए, तो नया प्रसरण क्या होगा?

उत्तर – 16 (प्रसरण अपरिवर्तित रहेगा)

प्रश्न 50 (मध्यम). एक डेटा सेट का माध्य 20 और प्रसरण 9 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 4 से गुणा किया जाए, तो नए डेटा सेट का माध्य और मानक विचलन क्या होगा?

उत्तर – नया माध्य = 80, नया मानक विचलन = 12

प्रश्न 51 (कठिन). एक समूह के 50 प्रेक्षणों का माध्य 15 और मानक विचलन 3 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को -2 से गुणा किया जाए और फिर उसमें 5 जोड़ दिया जाए, तो नए प्रेक्षणों का माध्य और प्रसरण क्या होगा?

उत्तर – नया माध्य = -25, नया प्रसरण = 36

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. दो छात्र A और B के गणित के 5 टेस्ट के अंक इस प्रकार हैं: A: 10, 80, 50, 20, 90; B: 45, 55, 50, 48, 52. क्या दोनों का प्रदर्शन समान है? 'केंद्रीय प्रवृत्ति की माप' और 'प्रकीर्णन की आवश्यकता' के संदर्भ में समझाएं।

› चरण 1: छात्र A के अंकों का माध्य ज्ञात करें: $(10 + 80 + 50 + 20 + 90) / 5 = 250 / 5 = 50$ अंक.

› चरण 2: छात्र B के अंकों का माध्य ज्ञात करें: $(45 + 55 + 50 + 48 + 52) / 5 = 250 / 5 = 50$ अंक.

› चरण 3: दोनों छात्रों का माध्य (केंद्रीय प्रवृत्ति की माप) 50 अंक है। लेकिन, हमें उनके अंकों में बिखराव देखना होगा.

› चरण 4: छात्र A के अंक (10, 20, 50, 80, 90) बहुत ज़्यादा फैले हुए हैं – 10 से 90 तक. यहाँ बहुत अधिक 'प्रकीर्णन' है.

› चरण 5: छात्र B के अंक (45, 48, 50, 52, 55) अपने माध्य 50 के आसपास ही हैं – 45 से 55 तक. यहाँ 'प्रकीर्णन' बहुत कम है.

› चरण 6: निष्कर्ष: भले ही दोनों का औसत प्रदर्शन (माध्य) समान है, लेकिन उनका प्रदर्शन समान नहीं है. छात्र B का प्रदर्शन ज़्यादा स्थिर और विश्वसनीय है क्योंकि उसके अंकों में 'प्रकीर्णन' कम है, जबकि छात्र A का प्रदर्शन अस्थिर है क्योंकि उसके अंकों में 'प्रकीर्णन' ज़्यादा है.

उत्तर – नहीं, दोनों का प्रदर्शन समान नहीं है. उनके माध्य अंक समान (50) हैं, लेकिन छात्र A के अंकों में 'प्रकीर्णन' (बिखराव) बहुत अधिक है (10 से 90), जबकि छात्र B के अंकों में 'प्रकीर्णन' बहुत कम है (45 से 55). छात्र B का प्रदर्शन ज़्यादा स्थिर और विश्वसनीय है.

उदाहरण 2. मान लो, एक क्लास में 5 बच्चों के गणित के नंबर (20 में से) हैं: 10, 12, 18, 11, 9. प्रकीर्णन की माप के प्रकारों को सूचीबद्ध करें जिनका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे.

- › पहला कदम, हम समझेंगे कि 'प्रकीर्णन' का मतलब क्या है - इसका मतलब है कि हमारे नंबर कितने फैले हुए हैं.
- › दूसरा कदम, हम उन अलग-अलग तरीकों को देखेंगे जिनसे हम इस फैलाव को माप सकते हैं.
- › इस अध्याय में, हम 'परिसर (Range)', 'माध्य विचलन (Mean Deviation)' और 'मानक विचलन (Standard Deviation)' का अध्ययन करेंगे.
- › हम 'चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)' का अध्ययन इस अध्याय में नहीं करेंगे, हालांकि यह प्रकीर्णन का एक प्रकार है.

उत्तर – इस अध्याय में हम परिसर, माध्य विचलन और मानक विचलन का अध्ययन करेंगे.

उदाहरण 3. एक छात्र ने 5 विषयों में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए: 75, 88, 62, 91, 70। इन अंकों का परिसर ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, दिए गए आँकड़ों में 'अधिकतम मान' (Maximum Value) ढूँढो।
- › यहाँ, सबसे ज्यादा अंक 91 हैं।
- › अब 'न्यूनतम मान' (Minimum Value) ढूँढो।
- › यहाँ, सबसे कम अंक 62 हैं।
- › परिसर के सूत्र का उपयोग करें: परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान।
- › तो, परिसर = $91 - 62 = 29$ ।

उत्तर – अंकों का परिसर 29 है।

उदाहरण 4. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

- › स्टेप 1: पहले हम इन सारे आँकड़ों का 'माध्य' (mean) निकालेंगे। सबको जोड़ो और कुल संख्याओं से भाग दो। $6 + 7 + 10 + 12 + 13 + 4 + 8 + 12 = 72$. कुल 8 संख्याएँ हैं, तो माध्य = $72 / 8 = 9$.
- › स्टेप 2: अब हर संख्या का इस माध्य (9) से 'विचलन' (deviation) निकालेंगे, और उसका 'निरपेक्ष मान' (absolute value) लेंगे। मतलब माइनस हटा देंगे।
 - › $|6 - 9| = |-3| = 3$
 - › $|7 - 9| = |-2| = 2$
 - › $|10 - 9| = |1| = 1$
 - › $|12 - 9| = |3| = 3$
 - › $|13 - 9| = |4| = 4$
 - › $|4 - 9| = |-5| = 5$
 - › $|8 - 9| = |-1| = 1$
 - › $|12 - 9| = |3| = 3$
- › स्टेप 3: अब इन सभी निरपेक्ष विचलनों को जोड़ो: $3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 1 + 3 = 22$.
- › स्टेप 4: आखिर में, इस जोड़ को कुल संख्याओं (8) से भाग दो। माध्य विचलन = $22 / 8 = 2.75$.

उत्तर – माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन = 2.75

उदाहरण 5. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

- › पहले हम 'माध्य' (mean) x निकालेंगे। इसके लिए हम हर प्रेक्षण (x_i) को उसकी बारंबारता (f_i) से गुणा करेंगे, यानी fix_i निकालेंगे। फिर इन सभी fix_i का योग ($\sum fix_i$) करेंगे और उसे कुल बारंबारता ($\sum f_i$) के योग से भाग देंगे। यहाँ $\sum f_i = 40$ और $\sum fix_i = 300$ है।
- › तो $x = 300 / 40 = 7.5$ आया।
- › अब हम हर प्रेक्षण (x_i) का माध्य ($x = 7.5$) से अंतर निकालेंगे और उसका 'निरपेक्ष मान' ($|x_i - x|$) लेंगे। जैसे, 2 के लिए $|2 - 7.5| = |-5.5| = 5.5$, 5 के लिए $|5 - 7.5| = |-2.5| = 2.5$ और इसी तरह सब के लिए।
- › फिर हम हर $|x_i - x|$ को उसकी संगत बारंबारता (f_i) से गुणा करेंगे, यानी $f_i|x_i - x|$ निकालेंगे। जैसे, 2 के लिए $2 * 5.5 = 11$, 5 के लिए $8 * 2.5 = 20$, और ऐसे ही सब के लिए।

› आखिर में, इन सभी $f_i|x_i - x|$ का योग $(f_i|x_i - x|)$ करेंगे, जो कि 92 है।

› अब, माध्य विचलन (M.D.(x)) निकालने के लिए हम $f_i|x_i - x|$ (यानी 92) को कुल बारंबारता (f_i , यानी 40) से भाग देंगे।

उत्तर – माध्य विचलन (M.D.(x)) = $92 / 40 = 2.3$

उदाहरण 6. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

› पहला कदम है सभी वर्गों का मध्य-बिंदु (x_i) निकालना। '10-20' के लिए 15, '20-30' के लिए 25, '30-40' के लिए 35, '40-50' के लिए 45, '50-60' के लिए 55, '60-70' के लिए 65, '70-80' के लिए 75।

› अब हमें 'माध्य' (mean, X) निकालना है। इसके लिए हम $f_i \times x_i$ निकालेंगे और सबका योग करेंगे। यहाँ N (कुल बारंबारता) = $2+3+8+14+8+3+2 = 40$ है। $(f_i \times x_i) = (2 \times 15) + (3 \times 25) + (8 \times 35) + (14 \times 45) + (8 \times 55) + (3 \times 65) + (2 \times 75) = 30 + 75 + 280 + 630 + 440 + 195 + 150 = 1800$ । तो, माध्य (X) = $(f_i \times x_i) / N = 1800 / 40 = 45$ ।

› अगला कदम है हर x_i का माध्य (45) से निरपेक्ष अंतर $(|x_i - X|)$ निकालना। $|15-45|=30$, $|25-45|=20$, $|35-45|=10$, $|45-45|=0$, $|55-45|=10$, $|65-45|=20$, $|75-45|=30$ ।

› अब हम f_i को इन निरपेक्ष अंतरों से गुणा करेंगे, यानी $f_i \times |x_i - X|$ । $(2 \times 30)=60$, $(3 \times 20)=60$, $(8 \times 10)=80$, $(14 \times 0)=0$, $(8 \times 10)=80$, $(3 \times 20)=60$, $(2 \times 30)=60$ ।

› इन सभी $(f_i \times |x_i - X|)$ का योग करेंगे: $(f_i \times |x_i - X|) = 60+60+80+0+80+60+60 = 400$ ।

› आखिरी में, माध्य विचलन (Mean Deviation) = $(f_i \times |x_i - X|) / N = 400 / 40$ ।

› याद रखना, अगर माध्यिका के सापेक्ष निकालना हो, तो पहले माध्यिका वर्ग ढूँढो, फिर माध्यिका का सूत्र लगाओ, और उसके बाद बाकी के steps माध्य के सापेक्ष वाले ही होंगे, बस X की जगह M इस्तेमाल होगा।

उत्तर – माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन (Mean Deviation about Mean) = 10

उदाहरण 7. मान लीजिए आपके पास डेटा सेट है: 1, 2, 3, 100। इसका माध्य विचलन क्यों समस्या पैदा कर सकता है?

› सबसे पहले, डेटा का माध्य (mean) निकालें: $(1+2+3+100) / 4 = 106 / 4 = 26.5$

› अब, हर संख्या का माध्य से निरपेक्ष विचलन $(|x_i - \text{mean}|)$ निकालें:

› $|1 - 26.5| = 25.5$

› $|2 - 26.5| = 24.5$

› $|3 - 26.5| = 23.5$

› $|100 - 26.5| = 73.5$

› इन विचलनों का योग = $25.5 + 24.5 + 23.5 + 73.5 = 147$

› माध्य विचलन = $147 / 4 = 36.75$

› यहाँ आप देख रहे हैं कि माध्य विचलन (36.75) काफी ज़्यादा है, जबकि सिर्फ एक संख्या (100) ने इसे बहुत बढ़ा दिया है। बाकी संख्याएँ (1, 2, 3) माध्य (26.5) से बहुत दूर हैं। यह 'extreme value' (100) पूरे 'spread' को बढ़ा देती है, जिससे माध्य विचलन 'misleading' हो सकता है।

उत्तर – माध्य विचलन 36.75 है, लेकिन यह एक बड़ी संख्या (100) के कारण बहुत अधिक है, जो डेटा के वास्तविक फैलाव को गलत तरीके से दर्शा सकता है।

उदाहरण 8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण ज्ञात कीजिए: 6, 8, 10, 12, 14

› सबसे पहले माध्य (x) निकालें: $(6+8+10+12+14) / 5 = 50 / 5 = 10$

› अब हर प्रेक्षण (x_i) का माध्य से विचलन $(x_i - x)$ निकालें: $(6-10)=-4$, $(8-10)=-2$, $(10-10)=0$, $(12-10)=2$, $(14-10)=4$

› इन विचलनों का वर्ग करें: $(-4)^2=16$, $(-2)^2=4$, $(0)^2=0$, $(2)^2=4$, $(4)^2=16$

› वर्गों का योग $((x_i - x)^2)$ करें: $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$

› प्रसरण का सूत्र लगाएं: $s^2 = (x_i - x)^2 / n = 40 / 5 = 8$

उत्तर – प्रसरण (s^2) = 8

उदाहरण 9. इन आंकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए: 6, 8, 10, 12, 14

- › सबसे पहले, हम 'माध्य' (mean, $\bar{x}$) निकालेंगे। $\bar{x} = (6+8+10+12+14) / 5 = 50 / 5 = 10$ ।
- › अब, हर 'प्रेक्षण' (observation) में से 'माध्य' घटाकर 'विचलन' (deviation) निकालेंगे, और फिर उसका 'वर्ग' (square) करेंगे: $(6-10)^2 = (-4)^2 = 16$; $(8-10)^2 = (-2)^2 = 4$; $(10-10)^2 = 0^2 = 0$; $(12-10)^2 = 2^2 = 4$; $(14-10)^2 = 4^2 = 16$ ।
- › सभी 'वर्गों' का 'योग' (sum of squares) करेंगे: $16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$ ।
- › अब 'प्रसरण' (variance) निकालेंगे: प्रसरण (σ^2) = (योग) / (n) = $40 / 5 = 8$ ।
- › अंत में, 'मानक विचलन' (standard deviation, σ) के लिए 'प्रसरण' का 'धनात्मक वर्गमूल' लेंगे: $\sigma = \sqrt{8} = 2.828$ (लगभग)।

उत्तर – मानक विचलन (Standard Deviation) = 2.828 (लगभग)**उदाहरण 10. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:**

- › पहले हमें 'माध्य' ($\bar{x}$) निकालना होगा। इसका सूत्र है $\bar{x} = (\sum f_i * x_i) / N$, जहाँ $N = \sum f_i$ ।
- › अब हर ' x_i ' के लिए 'माध्य' से उसका विचलन ($x_i - \bar{x}$) निकालो।
- › फिर हर विचलन का वर्ग करो: $(x_i - \bar{x})^2$ ।
- › इसके बाद, हर विचलन के वर्ग को उसकी 'बारंबारता' (f_i) से गुणा करो: $f_i * (x_i - \bar{x})^2$ ।
- › इन सभी $f_i * (x_i - \bar{x})^2$ मानों का योग ($\sum [f_i * (x_i - \bar{x})^2]$) ज्ञात करो।
- › प्रसरण (σ^2) निकालने के लिए, इस योग को कुल बारंबारता (N) से भाग दो।
- › और अंत में, मानक विचलन (σ) निकालने के लिए, प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल (प्रसरण) लो।

उत्तर – माध्य ($\bar{x}$) = 14, प्रसरण (σ^2) = 45.8, मानक विचलन (σ) = 6.77**उदाहरण 11. नीचे दिए गए सतत बारंबारता बंटन के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:**

- › वर्ग: 30-40 ($f=3$), 40-50 ($f=7$), 50-60 ($f=12$), 60-70 ($f=15$), 70-80 ($f=8$), 80-90 ($f=3$), 90-100 ($f=2$)
- › सबसे पहले, हर वर्ग का मध्य-बिंदु (x) निकालेंगे:
- › 30-40 का $x = (30+40)/2 = 35$
- › 40-50 का $x = (40+50)/2 = 45$
- › 50-60 का $x = (50+60)/2 = 55$
- › 60-70 का $x = (60+70)/2 = 65$
- › 70-80 का $x = (70+80)/2 = 75$
- › 80-90 का $x = (80+90)/2 = 85$
- › 90-100 का $x = (90+100)/2 = 95$
- › अब हमें f और x मिल गए हैं, तो हम f , fx , और fx^2 निकालेंगे।
- › $f(N) = 3+7+12+15+8+3+2 = 50$
- › $fx = (3*35) + (7*45) + (12*55) + (15*65) + (8*75) + (3*85) + (2*95) = 105 + 315 + 660 + 975 + 600 + 255 + 190 = 3100$
- › $fx^2 = (3*35^2) + (7*45^2) + (12*55^2) + (15*65^2) + (8*75^2) + (3*85^2) + (2*95^2) = (3*1225) + (7*2025) + (12*3025) + (15*4225) + (8*5625) + (3*7225) + (2*9025) = 3675 + 14175 + 36300 + 63375 + 45000 + 21675 + 18050 = 202250$
- › अब माध्य ($\bar{x}$) = $fx / N = 3100 / 50 = 62$
- › प्रसरण (σ^2) = $(fx^2 / N) - (\bar{x})^2 = (202250 / 50) - (62)^2 = 4045 - 3844 = 201$
- › मानक विचलन (σ) = प्रसरण = 201

उत्तर – प्रसरण (σ^2) = 201, मानक विचलन (σ) = 14.18 (लगभग)

उदाहरण 12. निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए (लघु विधि द्वारा): वर्ग: 30-40, 40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100; बारंबारता (f): 3, 7, 12, 15, 8, 3, 2

- › सबसे पहले, हम 'मध्य-बिंदु' (x) निकालते हैं: 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95।
- › अब, 'कल्पित माध्य' (A) चुनते हैं। हम बीच का मान, 65, चुन लेते हैं। 'वर्ग-अंतराल' की चौड़ाई (h) 10 है।
- › इसके बाद, हम ' $y = (x - A) / h$ ' निकालते हैं: $(35-65)/10 = -3$, $(45-65)/10 = -2$, $(55-65)/10 = -1$, $(65-65)/10 = 0$, $(75-65)/10 = 1$, $(85-65)/10 = 2$, $(95-65)/10 = 3$ ।
- › अब हम 'fy' और 'fy²' के कॉलम बनाते हैं और उनका योग () करते हैं।
- › वर्ग | f | x | y | fy | fy²
- › 30-40 | 3 | 35 | -3 | -9 | 27
- › 40-50 | 7 | 45 | -2 | -14 | 28
- › 50-60 | 12 | 55 | -1 | -12 | 12
- › 60-70 | 15 | 65 | 0 | 0 | 0
- › 70-80 | 8 | 75 | 1 | 8 | 8
- › 80-90 | 3 | 85 | 2 | 6 | 12
- › 90-100 | 2 | 95 | 3 | 6 | 18
- › -----
- › Total | N=50 | | | fy = -15 | fy² = 105
- › अब माध्य (x) के सूत्र में मान रखते हैं: $x = A + h (fy / N) = 65 + 10 * (-15 / 50) = 65 + 10 * (-0.3) = 65 - 3 = 62$ ।
- › प्रसरण (s²) के सूत्र में मान रखते हैं: $s^2 = h^2 [(1/N) \sum fy^2 - ((1/N) \sum fy)^2] = 10^2 [(1/50) * 105 - ((1/50) * -15)^2]$
- › $s^2 = 100 [2.1 - (-0.3)^2] = 100 [2.1 - 0.09] = 100 [2.01] = 201$ ।
- › मानक विचलन (s) निकालते हैं: $s = 201^{1/2} = 14.18$ ।

उत्तर – माध्य (x) = 62, प्रसरण (s²) = 201, मानक विचलन (s) = 14.18

उदाहरण 13. 5 प्रेक्षणों का माध्य 10 और प्रसरण 4 है। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा कर दिया जाए, तो नए प्रेक्षणों का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

- › हमें दिया गया है: मूल माध्य (x) = 10, मूल प्रसरण (s²) = 4।
- › प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा किया गया है, यानी 'a' = 3।
- › नए माध्य के लिए: हमें पता है कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 'a' से गुणा किया जाए, तो नया माध्य 'a * x' हो जाता है।
- › तो, नया माध्य = 3 * 10 = 30।
- › नए प्रसरण के लिए: हमें पता है कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 'a' से गुणा किया जाए, तो नया प्रसरण 'a² * s²' हो जाता है।
- › तो, नया प्रसरण = 3² * 4 = 9 * 4 = 36।

उत्तर – नए प्रेक्षणों का माध्य 30 होगा और नया प्रसरण 36 होगा।

बोर्ड परीक्षा के लिए खास

- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए महत्वपूर्ण है क्योंकि यह सांख्यिकी के मूल सिद्धांतों की नींव रखती है, खासकर 'प्रकीर्णन की आवश्यकता' पर सीधा प्रश्न आ सकता है।
- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर छोटे प्रश्नों में या बड़े प्रश्नों के एक हिस्से के रूप में पूछी जाती है। परिभाषा और सूत्र को अच्छे से याद रखना।

- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर आपको अवर्गीकृत या वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य या माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन निकालने को कहा जाता है, इसलिए इसके 'स्टेप्स' (steps) को अच्छे से समझना और 'निरपेक्ष मान' (absolute value) का ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है।
- बोर्ड परीक्षा में, असतत बारंबारता बंटन के लिए माध्य विचलन की गणना से जुड़े सवाल अक्सर पूछे जाते हैं, खासकर माध्यिका के सापेक्ष। गणना के स्टेप्स और सही सूत्र पर पूरा ध्यान देना।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! माध्य और माध्यिका दोनों के सापेक्ष माध्य विचलन निकालने के प्रश्न अक्सर आते हैं। माध्यिका निकालते समय 'माध्यिका वर्ग' का सही चुनाव और माध्यिका का सूत्र लगाना, इन पर ध्यान दें।
- यह विषय 'थ्योरी' के प्रश्नों के लिए महत्वपूर्ण है। अक्सर पूछा जाता है कि 'माध्य विचलन की परिसीमाएँ क्या हैं?' तो इन बिंदुओं को ध्यान से समझकर लिखना।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा में अक्सर 3-4 नंबर के लिए पूछा जाता है, खासकर जब 'माध्य विचलन' और 'प्रसरण' के बीच अंतर पूछा जाए। सूत्र को अच्छे से याद रखना और 'वर्ग' करना मत भूलना!
- अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए मानक विचलन के सूत्र को याद रखना और उसके चरणों का सही ढंग से पालन करना बहुत ज़रूरी है। 'स्क्वायर रूट' लेना मत भूलना!
- यह विषय बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सवाल अक्सर 4 से 6 अंकों के लिए आते हैं, खासकर जहाँ आपको पूरी सारणी बनाकर गणना करनी होती है।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! अक्सर 'प्रसरण' और 'मानक विचलन' की गणना पर 5 से 6 अंकों के सीधे प्रश्न आते हैं। अगर आपने 'मध्य-बिंदु' निकालने में गलती कर दी तो पूरा सवाल गलत हो जाएगा, इसलिए उस पर बहुत ध्यान देना।
- यह विधि बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर बड़े वर्ग-अंतराल वाले प्रश्न इसी विधि से हल करने को आते हैं। सूत्र को अच्छे से याद कर लेना और 'h' को बाहर निकालना मत भूलना।
- यह विषय बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 'एक नंबर' या 'दो नंबर' के सवाल में आता है, जहाँ आपको सीधे परिवर्तन का प्रभाव बताना होता है, इसलिए यह गुणधर्म अच्छे से याद कर लें।

एक नज़र में रिवीज़न

- › सांख्यिकी में केंद्रीय प्रवृत्ति और प्रकीर्णन दोनों आँकड़े समझने को आवश्यक हैं।
- › परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान (सबसे सरल प्रकीर्णन माप)
- › माध्य विचलन = $|x - a| / n$ (a = माध्य या माध्यिका)
- › असतत बारंबारता बंटन में, माध्य विचलन = $(f_i * |x_i - \text{केंद्रीय मान}|) / f_i$
- › सतत बंटन में x_i = वर्ग मध्य-बिंदु, फिर माध्य/माध्यिका अनुसार गणना।
- › माध्य विचलन 'निरपेक्ष मानों' पर आधारित होने से बीजगणितीय गणनाओं और 'extreme values' के लिए अनुपयुक्त है।
- › प्रसरण = माध्य से विचलनों के वर्गों का औसत (2)
- › मानक विचलन = प्रसरण; इकाई प्रेक्षणों के समान।
- › प्रसरण = $[f_i * (x_i - \bar{x})^2] / N$; मानक विचलन = प्रसरण
- › सतत बंटन मध्य-बिंदु (x) असतत विधि से प्रसरण/मानक विचलन।
- › लघु विधि से प्रसरण, मानक विचलन: $y = (x - A)/h$, सूत्र में 'h' और 'y' का प्रयोग।
- › जोड़/घटाव: प्रसरण/मावि अपरिवर्तित। गुणा: प्रसरण a^2 , मावि $|a|$ से गुणा।