प्रायिकता

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» प्रायिकता का सैद्धांतिक दृष्टिकोण: समप्रायिक परिणाम

प्रश्न 1 (आसान). क्या एक थैले में 2 लाल और 2 नीली गेंदें हों, तो लाल या नीली गेंद निकालने के परिणाम समप्रायिक होंगे?

उत्तर – हाँ, क्योंकि दोनों रंगों की गेंदों की संख्या बराबर है।

प्रश्न 2 (आसान). यदि एक बच्चे के पास 5 पेंसिल और 2 रबड़ हैं, और वह बिना देखे एक चीज़ उठाता है, तो क्या पेंसिल या रबड़ उठाने के परिणाम समप्रायिक हैं?

उत्तर – नहीं, क्योंकि पेंसिल की संख्या रबड़ से ज़्यादा है।

» सैद्धांतिक प्रायिकता की परिभाषा

प्रश्न 3 (आसान). एक पासे को एक बार फेंकने पर सम संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर – 3/6 = 1/2

प्रश्न 4 (आसान). एक थैले में 4 हरी और 6 नीली कंचे हैं। एक नीला कंचा निकालने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर – 6/10 = 3/5

प्रश्न 5 (मध्यम). 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालने पर बादशाह आने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर – 4/52 = 1/13

प्रश्न 6 (कठिन). एक बक्से में 100 बल्ब हैं, जिनमें से 10 खराब हैं। यादृच्छिक रूप से एक बल्ब चुनने पर, उसके खराब न होने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर – 90/100 = 9/10

» प्रारंभिक घटनाएँ और उनकी प्रायिकताओं का योग

प्रश्न 7 (आसान). एक पासे को उछालने पर '4' आने की घटना कैसी घटना है?

उत्तर – प्रारंभिक घटना

प्रश्न 8 (आसान). एक सिक्के को उछालने पर 'चित्त' आने की प्रायिकता 1/2 है। तो 'पट' आने की प्रायिकता क्या होगी, यह मानते हुए कि ये प्रारंभिक घटनाएँ हैं?

उत्तर – 1/2

प्रश्न 9 (मध्यम). एक डिब्बे में 5 लाल और 7 नीली गोलियाँ हैं। एक गोली निकालने पर 'लाल गोली' आने की प्रायिकता ज्ञात करें। क्या यह एक प्रारंभिक घटना है?

उत्तर – प्रायिकता 5/12 है। नहीं, यह प्रारंभिक घटना नहीं है, क्योंकि लाल गोलियाँ 5 हैं (एक से ज़्यादा परिणाम)।

प्रश्न 10 (कठिन). एक थैले में कुछ नीली और 4 पीली गेंदें हैं। यदि नीली गेंद निकालने की प्रायिकता 1/3 है और पीली गेंद निकालने की प्रायिकता 2/3 है, तो कुल कितनी गेंदें हैं?

उत्तर – नीली गेंदों की संख्या 2 है, कुल गेंदें 6 हैं।

» पूरक घटनाएँ और उनकी प्रायिकता

प्रश्न 11 (आसान). एक पासे को उछालने पर 6 आने की प्रायिकता 1/6 है। 6 न आने की प्रायिकता क्या होगी?
उत्तर – 5/6

प्रश्न 12 (आसान). अगर किसी घटना की प्रायिकता 0.4 है, तो उसकी पूरक घटना की प्रायिकता क्या होगी?
उत्तर – 0.6

प्रश्न 13 (मध्यम). एक थैले में 3 लाल और 7 नीली गेंदे हैं। एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता क्या है? और लाल गेंद न निकालने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – लाल गेंद निकालने की प्रायिकता 3/10। लाल गेंद न निकालने की प्रायिकता 7/10।

प्रश्न 14 (कठिन). 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। बादशाह न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 12/13

» असंभव घटना

प्रश्न 15 (आसान). एक पासे को उछालने पर 0 आने की प्रायिकता क्या होगी?
उत्तर – 0

प्रश्न 16 (आसान). अगर आपके पास 10 रुपये का सिक्का है, तो उसे उछालने पर 20 रुपये आने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 0

प्रश्न 17 (मध्यम). एक कैलेंडर में दिसंबर महीने में 32 दिन होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 0

» निश्चित या निर्धारित घटना

प्रश्न 18 (आसान). एक पासे को फेंकने पर 1 से 6 के बीच की संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?
उत्तर – 1

प्रश्न 19 (आसान). एक स्कूल बस में केवल बच्चे बैठे हैं। यदि एक व्यक्ति को बस से उतारा जाए, तो उसके बच्चा होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1

प्रश्न 20 (मध्यम). एक कैलेंडर में जनवरी महीने में 31 दिन होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1 (क्योंकि जनवरी में हमेशा 31 दिन होते हैं)

प्रश्न 21 (कठिन). अगर आज सोमवार है, तो अगले 7 दिन बाद फिर से सोमवार आने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1

» प्रायिकता मान की सीमा

प्रश्न 22 (आसान). क्या किसी घटना की प्रायिकता 0.5 हो सकती है?
उत्तर – हाँ

प्रश्न 23 (आसान). क्या किसी घटना की प्रायिकता -0.2 हो सकती है?
उत्तर – नहीं

प्रश्न 24 (मध्यम). यदि किसी घटना के होने की प्रायिकता 1/3 है, तो क्या यह प्रायिकता मान की सीमा में है?
उत्तर – हाँ, क्योंकि 1/3, 0 और 1 के बीच में आता है।

प्रश्न 25 (कठिन). एक पासे को उछालने पर संख्या 7 आने की प्रायिकता क्या होगी, और क्या यह प्रायिकता मान की सीमा में है?
उत्तर – संख्या 7 आने की प्रायिकता 0 होगी, क्योंकि पासे पर 1 से 6 तक ही संख्याएँ होती हैं। हाँ, यह प्रायिकता मान की सीमा (0) में है।

» ताश के पत्तों से संबंधित प्रायिकता

प्रश्न 26 (आसान). 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके लाल रंग का पत्ता होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 26/52 = 1/2

प्रश्न 27 (आसान). 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 13/52 = 1/4

प्रश्न 28 (मध्यम). 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके लाल फेस कार्ड होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 6/52 = 3/26 (लाल फेस कार्ड: 3 पान के + 3 ईंट के = 6)

प्रश्न 29 (कठिन). 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर उसके न तो इक्का और न ही बादशाह होने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 44/52 = 11/13 (कुल पत्ते 52, इक्के 4, बादशाह 4. तो (52 - 4 - 4) = 44 पत्ते ऐसे हैं जो न इक्का हैं न बादशाह)

» दो पासों को फेंकने पर प्रायिकता

प्रश्न 30 (आसान). दो पासों को फेंकने पर कुल कितने संभावित परिणाम होते हैं?
उत्तर – 36

प्रश्न 31 (आसान). दोनों पासों पर संख्याओं का योग 2 आने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1/36 (केवल (1,1))

प्रश्न 32 (मध्यम). दो पासों को फेंकने पर संख्याओं का योग 7 आने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 6/36 या 1/6

प्रश्न 33 (कठिन). दो पासों को फेंकने पर संख्याओं का योग 13 आने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 0/36 या 0 (क्योंकि अधिकतम योग 6+6=12 हो सकता है)

» क्षेत्रफल या लंबाई पर आधारित प्रायिकता (गैर-परीक्षा)

प्रश्न 34 (आसान). एक पेन को 10 सेमी लंबी पेंसिल के ऊपर गिराया जाता है। क्या प्रायिकता है कि वह पहले 2 सेमी के हिस्से पर गिरेगा?
उत्तर – 1/5

प्रश्न 35 (आसान). एक धावक को 200 मीटर की दौड़ में भाग लेना है। पहले 50 मीटर में उसके रुकने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1/4

प्रश्न 36 (मध्यम). एक आयताकार खेत (लंबाई 100 मीटर, चौड़ाई 50 मीटर) में एक छोटा सा तालाब (लंबाई 20 मीटर, चौड़ाई 10 मीटर) है। यदि एक पक्षी बेतरतीब ढंग से खेत में उतरता है, तो उसके तालाब में उतरने की प्रायिकता क्या है?
उत्तर – 1/25

प्रश्न 37 (कठिन). एक वर्ग (भुजा 8 सेमी) के अंदर एक वृत्त बनाया गया है जो वर्ग की सभी भुजाओं को छूता है। यदि एक बिंदु को वर्ग के अंदर बेतरतीब ढंग से चुना जाता है, तो उसके वृत्त के अंदर होने की प्रायिकता क्या है? (= 22/7 लें)
उत्तर – 11/14

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. बताइए, यदि एक न्यायसंगत पासे को फेंका जाए, तो क्या सभी परिणाम समप्रायिक हैं?

› पहला कदम: पासा फेंकने पर कौन-कौन से संभव परिणाम आ सकते हैं? वे हैं: 1, 2, 3, 4, 5, 6।

› दूसरा कदम: क्या इन सभी परिणामों के आने की संभावना बराबर है? हाँ, अगर पासा न्यायसंगत है, तो किसी भी संख्या के आने का झुकाव ज़्यादा नहीं होगा।

› तीसरा कदम: प्रत्येक संख्या (1, 2, 3, 4, 5, 6) के आने की प्रायिकता 1/6 होगी।

उत्तर – हाँ, एक न्यायसंगत पासे को फेंकने पर सभी परिणाम (1, 2, 3, 4, 5, 6) समप्रायिक हैं।

उदाहरण 2. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। थैले में से बिना देखे एक गेंद निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह एक लाल गेंद होगी?

› पहला कदम: पहले देखो कुल कितनी गेंदे हैं। 3 लाल + 5 काली = 8 गेंदें। तो, 'सभी संभव परिणामों की संख्या' = 8

› दूसरा कदम: हमें क्या चाहिए? लाल गेंद। लाल गेंदें कितनी हैं? 3। तो, 'लाल गेंद आने के अनुकूल परिणामों की संख्या' = 3

› तीसरा कदम: अब सूत्र लगाओ। P(लाल गेंद) = (अनुकूल परिणाम) / (कुल परिणाम) = 3 / 8

› चौथा कदम: उत्तर को ऐसे ही छोड़ दो या दशमलव में लिख दो।

उत्तर – लाल गेंद होने की प्रायिकता = 3/8

उदाहरण 3. एक थैले में 3 लाल, 2 नीली और 1 हरी गेंद है। एक गेंद को यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। 'लाल गेंद निकलना', 'नीली गेंद निकलना' और 'हरी गेंद निकलना' इन तीनों प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि इनकी प्रायिकताओं का योग 1 है।

› सबसे पहले, कुल गेंदों की संख्या गिनते हैं: 3 लाल + 2 नीली + 1 हरी = 6 गेंदें।

› अब, 'लाल गेंद निकलने' की प्रायिकता निकालते हैं: अनुकूल परिणाम (लाल गेंदें) 3 हैं, कुल परिणाम 6 हैं। तो, P(लाल) = 3/6 = 1/2।

› फिर, 'नीली गेंद निकलने' की प्रायिकता निकालते हैं: अनुकूल परिणाम (नीली गेंदें) 2 हैं, कुल परिणाम 6 हैं। तो, P(नीली) = 2/6 = 1/3।

› अंत में, 'हरी गेंद निकलने' की प्रायिकता निकालते हैं: अनुकूल परिणाम (हरी गेंद) 1 है, कुल परिणाम 6 हैं। तो, P(हरी) = 1/6।

› अब तीनों प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं को जोड़ते हैं: P(लाल) + P(नीली) + P(हरी) = 1/2 + 1/3 + 1/6।

› इन भिन्नों को जोड़ने के लिए हम लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) लेते हैं, जो 6 है। तो, (3/6) + (2/6) + (1/6) = (3+2+1)/6 = 6/6 = 1।

उत्तर – P(लाल) = 1/2, P(नीली) = 1/3, P(हरी) = 1/6। इन तीनों प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1 है।

उदाहरण 4. संगीता के टेनिस मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के मैच जीतने की क्या प्रायिकता है?

› यहाँ संगीता के जीतने की घटना को 'S' मान लेते हैं। तो P(S) = 0.62 दिया गया है।

› रेशमा का जीतना, संगीता के न जीतने के बराबर है। यानी यह घटना 'S नहीं' (S) है।

› हम जानते हैं कि P(S) + P(S) = 1 होता है।

› तो, P(रेशमा जीतेगी) = P(S) = 1 - P(S) होगा।

› P(रेशमा जीतेगी) = 1 - 0.62

› P(रेशमा जीतेगी) = 0.38

उत्तर – रेशमा के मैच जीतने की प्रायिकता 0.38 है।

उदाहरण 5. एक थैले में केवल लाल रंग की 5 गेंदे हैं। उसमें से एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता क्या होगी?

› सबसे पहले देखेंगे कि कुल संभव परिणाम कितने हैं। थैले में 5 लाल गेंदे हैं, तो कुल परिणाम 5 हुए।

› अब देखेंगे कि घटना के अनुकूल परिणाम कितने हैं। हमें नीली गेंद निकालनी है, पर थैले में कोई नीली गेंद है ही नहीं। तो नीली गेंद निकालने के अनुकूल परिणाम 0 हुए।

› प्रायिकता का सूत्र लगाएंगे: प्रायिकता = (अनुकूल परिणामों की संख्या) / (कुल संभव परिणामों की संख्या)

› मान रखेंगे: प्रायिकता = 0 / 5

› हल करेंगे।

उत्तर – तो नीली गेंद निकालने की प्रायिकता 0 होगी। यह एक असंभव घटना है।

उदाहरण 6. एक बॉक्स में 5 हरी पेंसिलें हैं। यदि बिना देखे एक पेंसिल निकाली जाए, तो हरी पेंसिल निकलने की प्रायिकता क्या होगी?

› सबसे पहले, बॉक्स में कुल कितनी पेंसिलें हैं? 5 हरी पेंसिलें हैं, तो कुल परिणाम = 5।

› दूसरा, हम कौन सी घटना की प्रायिकता जानना चाहते हैं? हरी पेंसिल निकलने की।

› अब देखो, क्या बॉक्स में कोई और रंग की पेंसिल है? नहीं, सिर्फ हरी हैं। तो हरी पेंसिल निकलने के अनुकूल परिणाम कितने होंगे? 5 ही होंगे।

› तो प्रायिकता का सूत्र क्या है? अनुकूल परिणाम / कुल परिणाम।

› यहाँ प्रायिकता = 5/5 = 1।

उत्तर – हरी पेंसिल निकलने की प्रायिकता 1 है। यह एक निश्चित घटना है।

उदाहरण 7. अगर एक बक्से में 5 लाल और 3 नीली गेंदें हैं। बक्से से यादृच्छया एक गेंद निकालने पर हरे रंग की गेंद आने की प्रायिकता क्या होगी?

› कुल गेंदों की संख्या = 5 (लाल) + 3 (नीली) = 8

› हरे रंग की गेंदों की संख्या = 0 (क्योंकि बक्से में कोई हरी गेंद नहीं है)

› हरे रंग की गेंद आने की प्रायिकता = (हरे रंग की गेंदों की संख्या) / (कुल गेंदों की संख्या)

› प्रायिकता = 0 / 8 = 0

उत्तर – हरे रंग की गेंद आने की प्रायिकता 0 है।

उदाहरण 8. अच्छी तरह से फेटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता एक बादशाह होगा।

› पहला कदम, देखो कि कुल कितने पत्ते हैं? कुल पत्ते = 52.

› अब, दूसरा कदम, हमें कौन सा पत्ता चाहिए? एक बादशाह। अब बताओ, एक गड्डी में कुल कितने बादशाह होते हैं? सोचो... हाँ, 4 बादशाह होते हैं (ईंट का, पान का, चिड़ी का, हुकुम का).

› तो, अनुकूल परिणामों की संख्या = 4.

› प्रायिकता का सूत्र क्या है? अनुकूल परिणामों की संख्या / कुल संभव परिणामों की संख्या.

› तो, प्रायिकता = 4 / 52.

उत्तर – इसे सरल करने पर हमें मिलता है 1/13. तो एक बादशाह निकलने की प्रायिकता 1/13 है।

उदाहरण 9. दो पासों को एक साथ फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता क्या है कि दोनों पासों पर संख्याओं का योग 8 आएगा?

› सबसे पहले, कुल संभावित परिणाम गिनो। दो पासे फेंकने पर कुल 6 × 6 = 36 परिणाम होते हैं।

› अब, वे अनुकूल परिणाम गिनो जहाँ संख्याओं का योग 8 आता है। वे हैं: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)। ये कुल 5 परिणाम हैं।

› प्रायिकता का सूत्र लगाओ: P(घटना) = अनुकूल परिणाम / कुल परिणाम।

› तो, P(योग 8) = 5/36।

उत्तर – दोनों पासों पर संख्याओं का योग 8 आने की प्रायिकता 5/36 है।

उदाहरण 10. एक म्यूज़िकल चेयर गेम में, संगीत बजाने वाली महिला को कहा गया कि वह संगीत शुरू होने के बाद 3 मिनट के अंदर कभी भी संगीत बंद कर दे। इसकी क्या प्रायिकता है कि संगीत शुरू होने के पहले 1 मिनट के अंदर बंद हो जाएगा?

› सबसे पहले, हम देखेंगे कि संगीत कितने समय तक बज सकता है। उसे 0 से 3 मिनट के बीच कभी भी बंद करना है। तो कुल 'लंबाई' या 'अवधि' कितनी हुई? 3 मिनट।

› अब, अनुकूल घटना क्या है? संगीत 'पहले 1 मिनट के अंदर' बंद हो जाए। मतलब 0 से 1 मिनट के बीच। तो अनुकूल 'लंबाई' कितनी हुई? 1 मिनट।

› अब प्रायिकता का सूत्र लगाएँगे: प्रायिकता = (अनुकूल अवधि) / (कुल अवधि)।

› तो, प्रायिकता = 1 मिनट / 3 मिनट।

› इसे हल करने पर मिलेगा 1/3।

उत्तर – इसकी प्रायिकता 1/3 है कि संगीत शुरू होने के पहले 1 मिनट के अंदर बंद हो जाएगा।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह सूत्र और प्रायिकता का मान 0 से 1 के बीच होने का नियम, बोर्ड परीक्षा में सीधे-सीधे 1-2 अंक के प्रश्न में आता है। इसे अच्छे से याद कर लेना!

• यह नियम बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे सवाल या प्रायिकता संबंधी बड़े सवालों में इसका उपयोग अक्सर होता है। इसे अच्छे से समझ लो!

• पूरक घटनाओं से जुड़े प्रश्न अक्सर सीधे सूत्र पर आधारित होते हैं और परीक्षा में अच्छे अंक दिलाते हैं, इसलिए यह कॉन्सेप्ट बहुत ध्यान से समझना।

• यह एक बहुत सीधा सवाल होता है, अक्सर एक नंबर के प्रश्न में आता है। याद रखें कि असंभव घटना की प्रायिकता हमेशा '0' ही लिखनी है।

• निश्चित और असंभव घटनाओं की प्रायिकता (0 और 1) पर आधारित सीधे सवाल अक्सर एक नंबर के लिए बोर्ड परीक्षा में पूछ लिए जाते हैं। ध्यान से समझना!

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर एक नंबर का सवाल आता है जिसमें आपको यह पहचानना होता है कि कौन सा मान प्रायिकता हो सकता है और कौन सा नहीं।

• ताश के पत्तों से संबंधित प्रायिकता के सवाल बोर्ड परीक्षा में बहुत आते हैं, खासकर फेस कार्ड, इक्का या किसी खास सूट के पत्तों की प्रायिकता वाले। इनके सभी प्रकार के सवाल अच्छे से समझ लेना, बेटा।

• यह वाला कांसेप्ट बोर्ड एग्जाम में अक्सर आता है, खासकर योग वाले प्रश्न। इसलिए, वो 36 परिणामों वाली सारणी (table) को बनाना और समझना बहुत ज़रूरी है। अगर तुम उसे अच्छे से बना लेते हो, तो कोई भी सवाल गलत नहीं होगा।

एक नज़र में रिवीज़न

› समप्रायिक परिणाम = प्रत्येक नतीजे की बराबर संभावना।

› P(E) = अनुकूल परणिाम / कुल परणिाम; 0 P(E) 1

› प्रारंभिक घटना = एक परिणाम; सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग = 1।

› P(E) + P(E नहीं) = 1; 'E नहीं' = पूरक घटना

› असंभव घटना = कभी घटित नहीं होती, प्रायिकता 0.

› निश्चित घटना = हमेशा होगी; प्रायिकता = 1

› प्रायिकता हमेशा 0 और 1 के बीच होती है (0 P(E) 1)।

› ताश: 52 पत्ते, 4 सूट, 12 फेस कार्ड (J, Q, K)।

› दो पासे: कुल 36 परिणाम (6x6)। अनुकूल परिणाम गिनो। P = अनुकूल/36।

› गैर-परीक्षा; परिणामों को गिनना संभव नहीं; लंबाई/क्षेत्रफल का अनुपात।