# वृत्त

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

## अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

### » वृत्त और एक रेखा की विभिन्न स्थितियाँ

**प्रश्न 1 (आसान). वह रेखा जो वृत्त को किसी भी बिंदु पर नहीं काटती, उसे क्या कहते हैं?**
उत्तर – अप्रतिच्छेदी रेखा

**प्रश्न 2 (आसान). एक रेखा वृत्त को अधिकतम कितने बिंदुओं पर काट सकती है?**
उत्तर – दो बिंदुओं पर

**प्रश्न 3 (मध्यम). अगर एक रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है, तो उसे कौन सी रेखा कहेंगे?**
उत्तर – स्पर्श रेखा

**प्रश्न 4 (कठिन). एक कुएँ की घिरनी को वृत्त मानिए और पानी निकालने वाली रस्सी को रेखा। रस्सी कौन सी स्थिति में है?**
उत्तर – स्पर्श रेखा

### » वृत्त की स्पर्श रेखा की परिभाषा और गुण

**प्रश्न 5 (आसान). वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा क्या कहलाती है?**
उत्तर – स्पर्श रेखा

**प्रश्न 6 (आसान). वह बिंदु जहाँ स्पर्श रेखा वृत्त को छूती है, उसे क्या कहते हैं?**
उत्तर – स्पर्श बिंदु

**प्रश्न 7 (मध्यम). क्या एक वृत्त के एक ही बिंदु पर दो अलग-अलग स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं? क्यों?**
उत्तर – नहीं, क्योंकि स्पर्श रेखा की परिभाषा के अनुसार, एक बिंदु पर केवल एक ही स्पर्श रेखा हो सकती है जो उसे छूकर निकलती है, दूसरी रेखा उसे काट देगी या कहीं और छूएगी।

**प्रश्न 8 (कठिन). छेदक रेखा और स्पर्श रेखा के बीच क्या संबंध है? एक उदाहरण दो।**
उत्तर – स्पर्श रेखा, छेदक रेखा की एक विशेष स्थिति है जब छेदक रेखा के दोनों प्रतिच्छेदन बिंदु एक-दूसरे के बिल्कुल पास आ जाते हैं और एक ही बिंदु पर मिल जाते हैं। जैसे, एक रस्सी (छेदक रेखा) को वृत्त के अंदर से गुज़ारो, और फिर धीरे-धीरे उसे ऐसे खिसकाओ कि वो बस वृत्त को छूकर निकल जाए, तब वह स्पर्श रेखा बन जाएगी।

### » प्रमेय 10.1: स्पर्श रेखा और त्रिज्या का लंबवत संबंध

**प्रश्न 9 (आसान). प्रमेय 10.1 के अनुसार, स्पर्श रेखा और त्रिज्या के बीच स्पर्श बिंदु पर कितने डिग्री का कोण बनता है?**
उत्तर – 90 डिग्री

**प्रश्न 10 (आसान). क्या वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखा पर खींचा गया कोई भी लंब हमेशा त्रिज्या होगा?**
उत्तर – हाँ, क्योंकि त्रिज्या ही न्यूनतम दूरी होती है।

**प्रश्न 11 (मध्यम). एक वृत्त की त्रिज्या 8 सेमी है। केंद्र O से एक बाहरी बिंदु A की दूरी 17 सेमी है। यदि A से वृत्त पर एक स्पर्श रेखा AB खींची जाती है, तो AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।**
उत्तर – 15 सेमी

**प्रश्न 12 (कठिन). एक वृत्त के केंद्र से 10 सेमी की दूरी पर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लंबाई 8 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

उत्तर – 6 सेमी

### » एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या

**प्रश्न 13 (आसान). अगर एक बिंदु वृत्त की परिधि पर ही है, तो उससे कितनी स्पर्श रेखाएँ बनेंगी?**

उत्तर – 1

**प्रश्न 14 (आसान). क्या वृत्त के अंदर के बिंदु से कोई स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?**

उत्तर – नहीं, 0

**प्रश्न 15 (मध्यम). एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है। एक बिंदु A, वृत्त के केंद्र से 6 सेमी की दूरी पर है। बिंदु A से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?**

उत्तर – 0

**प्रश्न 16 (कठिन). एक वृत्त की त्रिज्या r है। एक बिंदु B वृत्त के केंद्र से 2r की दूरी पर है। इस बिंदु B से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?**

उत्तर – 2

### » प्रमेय 10.2: बाहरी बिंदु से स्पर्श रेखाओं की लंबाई की समानता

**प्रश्न 17 (आसान). एक वृत्त के बाहर एक बिंदु A से दो स्पर्श रेखाएँ AB और AC खींची जाती हैं। यदि AB = 7 cm है, तो AC की लंबाई कितनी होगी?**

उत्तर – 7 cm

**प्रश्न 18 (आसान). प्रमेय 10.2 के अनुसार, वृत्त के बाहर एक ही बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयाँ _____ होती हैं।**

उत्तर – बराबर

**प्रश्न 19 (मध्यम). एक बिंदु Q से, एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm है तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

उत्तर – 7 cm

**प्रश्न 20 (कठिन). एक वृत्त के बाहर एक बिंदु P से, वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची जाती हैं। यदि केंद्र O है और APB = 80° है, तो AOP ज्ञात कीजिए।**

उत्तर – 50°

### » स्पर्श रेखा प्रमेयों का अनुप्रयोग: उदाहरण और समस्याएँ

**प्रश्न 21 (आसान). एक वृत्त पर एक बिंदु Q से स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm है और Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

उत्तर – 7 cm

**प्रश्न 22 (आसान). यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि POQ = 110°, तो PTQ ज्ञात कीजिए।**

उत्तर – 70°

**प्रश्न 23 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।**

उत्तर – हल: मान लीजिए AB वृत्त का व्यास है और PQ तथा RS व्यास के सिरे A और B पर स्पर्श रेखाएँ हैं। प्रमेय 10.1 के अनुसार, OA  PQ और OB  RS। क्योंकि OA और OB त्रिज्याएँ हैं और एक ही रेखा (व्यास) पर स्थित हैं, OAP = 90° और OBR = 90°। ये एकांतर अंतः कोण हैं जो बराबर हैं, इसलिए PQ || RS।

**प्रश्न 24 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है। सिद्ध कीजिए: AB + CD = AD + BC।**

उत्तर – हल: मान लीजिए चतुर्भुज ABCD वृत्त को क्रमशः P, Q, R, S बिंदुओं पर स्पर्श करता है (AB पर P, BC पर Q, CD पर R, DA पर S)। प्रमेय 10.2 के अनुसार, वृत्त के बाहर के एक बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं। इसलिए, AP = AS (बिंदु A से), BP = BQ (बिंदु B से), CR = CQ (बिंदु C से), और DR = DS (बिंदु D से)। अब, AB + CD = (AP + PB) + (CR + RD)। मान रखो: AB + CD = (AS + BQ) + (CQ + DS)। इन्हें पुनः व्यवस्थित करो: AB + CD = (AS + DS) + (BQ + CQ)। यह AD + BC के बराबर है। अतः, AB + CD = AD + BC।

## हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

**उदाहरण 1. एक वृत्त और एक रेखा एक-दूसरे को कितने बिंदुओं पर काट सकते हैं?**

› पहला तरीका: रेखा वृत्त से बहुत दूर हो सकती है, उसे बिल्कुल भी न छुए।

› दूसरा तरीका: रेखा वृत्त को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काट सकती है, उसके अंदर से होकर गुज़रे।

› तीसरा तरीका: रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर छूकर निकल सकती है।

**उत्तर – एक वृत्त और एक रेखा एक-दूसरे को या तो 0 बिंदु पर (अप्रतिच्छेदी रेखा), या 1 बिंदु पर (स्पर्श रेखा), या 2 बिंदुओं पर (छेदक रेखा) काट सकते हैं।**

**उदाहरण 2. एक वृत्त पर एक बिंदु P दिया गया है। बिंदु P पर वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?**

› हमें यह समझना है कि 'वृत्त पर एक बिंदु' का क्या मतलब है। इसका मतलब है कि वह बिंदु वृत्त की परिधि पर है, न तो अंदर और न ही बाहर।

› हमने अभी-अभी पढ़ा कि स्पर्श रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

› अब, अगर बिंदु P वृत्त पर है, तो उस बिंदु से कोई भी रेखा वृत्त को सिर्फ एक ही तरीके से छूकर निकल सकती है, ताकि वह वृत्त को कहीं और न काटे।

› अगर हम बिंदु P से एक से ज़्यादा रेखाएँ खींचने की कोशिश करेंगे जो वृत्त को छूती हों, तो दूसरी रेखा या तो वृत्त के अंदर से काटती हुई जाएगी (छेदक रेखा बन जाएगी) या फिर वृत्त को कहीं और भी छू लेगी, जो कि स्पर्श रेखा की परिभाषा के खिलाफ होगा।

**उत्तर – वृत्त पर स्थित किसी एक बिंदु से केवल 'एक और केवल एक' स्पर्श रेखा ही खींची जा सकती है।**

**उदाहरण 3. एक वृत्त का केंद्र O है और उसकी त्रिज्या 5 सेमी है। बिंदु P पर एक स्पर्श रेखा PQ खींची गई है। यदि केंद्र O से Q तक की दूरी OQ = 13 सेमी है, तो स्पर्श रेखा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

› हमें दिया गया है कि वृत्त की त्रिज्या OP = 5 सेमी।

› प्रमेय 10.1 के अनुसार, स्पर्श रेखा PQ, त्रिज्या OP पर स्पर्श बिंदु P पर लंबवत है। इसका मतलब है कि OPQ = 90°।

› तो, OPQ एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें OQ कर्ण है।

› पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करने पर: $OP^2 + PQ^2 = OQ^2$

› मान रखने पर: $5^2 + PQ^2 = 13^2$

› $25 + PQ^2 = 169$

› $PQ^2 = 169 - 25$

› $PQ^2 = 144$

› $PQ = 144$

› PQ = 12 सेमी

**उत्तर – स्पर्श रेखा PQ की लंबाई 12 सेमी है।**

**उदाहरण 4. एक बिंदु P वृत्त के केंद्र O से 5 सेमी दूर है। यदि वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है, तो बिंदु P से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?**

› सबसे पहले, हमें यह देखना होगा कि बिंदु P वृत्त के अंदर है, वृत्त पर है, या वृत्त के बाहर है।

› वृत्त का केंद्र O है और त्रिज्या r = 3 सेमी है।

› बिंदु P की केंद्र से दूरी OP = 5 सेमी है।

› चूंकि OP (5 सेमी) त्रिज्या r (3 सेमी) से बड़ा है, इसका मतलब है कि बिंदु P वृत्त के बाहर स्थित है।

› अब, हमारे नियम के अनुसार, वृत्त के बाहर स्थित किसी भी बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

**उत्तर – बिंदु P से वृत्त पर 2 स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।**

**उदाहरण 5. एक बिंदु P से, जो एक वृत्त के केंद्र O से 13 cm की दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा PQ खींची जाती है। यदि वृत्त की त्रिज्या 5 cm है, तो स्पर्श रेखा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

› सबसे पहले, हम एक चित्र बनाएँगे। एक वृत्त, केंद्र O, बाहरी बिंदु P। OP की दूरी 13 cm है।

› स्पर्श रेखा PQ है, जिसका मतलब Q वृत्त पर एक बिंदु है।

› हमें पता है कि त्रिज्या OQ स्पर्श रेखा PQ पर लंब होती है (प्रमेय 10.1 से)। तो त्रिभुज OQP एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें Q = 90°।

› अब हम पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करेंगे: कर्ण² = आधार² + लंब²।

› यहाँ कर्ण OP है (केंद्र से बाहरी बिंदु की दूरी) = 13 cm।

› एक भुजा OQ है (त्रिज्या) = 5 cm।

› हमें दूसरी भुजा PQ (स्पर्श रेखा की लंबाई) ज्ञात करनी है।

› तो, $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$।

› $13^2 = 5^2 + PQ^2$।

› $169 = 25 + PQ^2$।

› $PQ^2 = 169 - 25$।

› $PQ^2 = 144$।

› $PQ = \sqrt{144} = 12$ cm।

**उत्तर – स्पर्श रेखा PQ की लंबाई 12 cm है।**

**उदाहरण 6. 5 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की 8 cm लंबी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करती हैं। TP की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

› पहला कदम: एक वृत्त बनाओ जिसका केंद्र O है और त्रिज्या 5 cm है। एक जीवा PQ बनाओ जिसकी लंबाई 8 cm है। P और Q से स्पर्श रेखाएँ खींचो जो T पर मिलती हैं। हमें TP की लंबाई निकालनी है।

› दूसरा कदम: O को T से मिलाओ। OT रेखा PQ को बिंदु R पर काटेगी। चूंकि TPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है (प्रमेय 10.2 के अनुसार TP = TQ), और OT, PTQ का कोण समद्विभाजक है, तो OT, PQ पर लंब होगा और PQ को समद्विभाजित करेगा।

› तीसरा कदम: इसका मतलब है कि PR = RQ = 8/2 = 4 cm।

› चौथा कदम: अब ORP एक समकोण त्रिभुज है (क्योंकि OR  PQ)। इसमें OP (त्रिज्या) = 5 cm और PR = 4 cm। पाइथागोरस प्रमेय लगाओ: $OP^2 = OR^2 + PR^2$। तो $5^2 = OR^2 + 4^2$। $25 = OR^2 + 16$। $OR^2 = 9$। तो OR = 3 cm।

› पांचवाँ कदम: अब देखो, TRP और PRO दोनों समकोण त्रिभुज हैं। इनमें TPR + PRO = 90° और PRO + ROP = 90°। इसका मतलब है कि TPR = ROP।

› छठा कदम: चूंकि TRP और PRO में PRT = POR (सिद्ध किया) और TRP = PRO (दोनों 90°), तो ये दोनों त्रिभुज AA समरूपता से समरूप हैं।

› सातवाँ कदम: समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात बराबर होता है: TP/PO = RP/RO। मान रखो: TP/5 = 4/3।

› आठवाँ कदम: इसे हल करने पर TP = (5 × 4) / 3 = 20/3 cm।

› वैकल्पिक विधि (पाइथागोरस प्रमेय से): माना TP = x और TR = y। TRP में, $x^2 = y^2 + PR^2 = y^2 + 4^2 = y^2 + 16$ (समीकरण 1)। अब, OTP भी एक समकोण त्रिभुज है (प्रमेय 10.1 से OPT = 90°)। इसमें OT = OR + RT = 3 + y। तो $OT^2 = OP^2 + TP^2$। $(3 + y)^2 = 5^2 + x^2$। इसे खोलो: $9 + 6y + y^2 = 25 + x^2$ (समीकरण 2)। समीकरण 1 से $x^2$ का मान समीकरण 2 में रखो: $9 + 6y + y^2 = 25 + (y^2 + 16)$। $9 + 6y + y^2 = 41 + y^2$। दोनों तरफ से $y^2$ हटा दो: 9 + 6y = 41। 6y = 32। y = 32/6 = 16/3 cm। अब y का मान समीकरण 1 में रखो: $x^2 = (16/3)^2 + 16 = 256/9 + 16 = (256 + 144)/9 = 400/9$। तो x = (400/9) = 20/3 cm।

**उत्तर – TP की लंबाई 20/3 cm है।**

## बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर सीधे परिभाषाओं या उदाहरणों के माध्यम से पूछी जाती है, खासकर स्पर्श रेखा की परिभाषा।

• यह प्रमेय बोर्ड परीक्षा में सीधा कथन लिखने या इस पर आधारित प्रश्न हल करने के लिए अक्सर पूछा जाता है। इसके कथन को ठीक से याद रखना और इसका उपयोग करना सीखना बहुत जरूरी है।

• यह अवधारणा सीधे-सीधे 1 या 2 अंक के प्रश्न में पूछी जा सकती है, जैसे 'एक बाहरी बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?' या बहुविकल्पीय प्रश्न में आ सकती है।

• यह प्रमेय बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इसके सीधे अनुप्रयोग वाले सवाल या उपपत्ति (proof) दोनों ही आ सकते हैं, इसलिए इसका कथन और इसका प्रूफ, दोनों को अच्छे से समझ लें।

• यह भाग बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे सवाल और सिद्ध करने वाले प्रश्न अक्सर आते हैं। एक भी नंबर कटने न पाए, हर कदम पर तर्क स्पष्ट लिखें।

## एक नज़र में रिवीज़न

› वृत्त व रेखा की 3 स्थितियाँ: अप्रतिच्छेदी, छेदक, स्पर्श रेखा (1 बिंदु)

› स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या के लंबवत (90° कोण)।

› अंदर 0, पर 1, बाहर 2 स्पर्श रेखाएँ।

› बाहरी बिंदु से स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

› स्पर्श रेखा प्रमेयों का अनुप्रयोग: उदाहरण और समस्याओं का हल।