बहुपद

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» बहुपद की पहचान और घात

प्रश्न 1 (आसान). क्या 3y + 5 एक बहुपद है? अगर हाँ, तो इसकी घात क्या है?
उत्तर – हाँ, यह एक बहुपद है और इसकी घात 1 है।

प्रश्न 2 (आसान). क्या 7 एक बहुपद है? अगर हाँ, तो इसकी घात क्या है?
उत्तर – हाँ, यह एक बहुपद है (इसे 7x^0 लिख सकते हैं) और इसकी घात 0 है।

प्रश्न 3 (मध्यम). पहचानिए कि क्या $x^3 - 2x + 1/x$ एक बहुपद है? अगर हाँ, तो इसकी घात क्या है?
उत्तर – नहीं, यह एक बहुपद नहीं है क्योंकि इसमें '1/x' है, जिसका मतलब x^-1 है और घात ऋणात्मक है।

प्रश्न 4 (कठिन). यदि $5t^2 - 4t + 9$ एक बहुपद है, तो यह किस प्रकार का बहुपद है (रैखिक, द्विघात, या त्रिघात)?
उत्तर – यह एक द्विघात बहुपद है क्योंकि इसमें चर 't' की सबसे बड़ी घात 2 है।

» बहुपद का मान और शून्यक

प्रश्न 5 (आसान). p(x) = x - 7 का शून्यक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 7

प्रश्न 6 (आसान). बहुपद p(x) = 3x + 6 का शून्यक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – -2

प्रश्न 7 (मध्यम). अगर p(x) = 4x - 8 है, तो x = 3 पर बहुपद का मान क्या होगा?
उत्तर – 4

प्रश्न 8 (कठिन). यदि बहुपद p(x) = ax + 5 का शून्यक -1 है, तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 5

» रैखिक बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ

प्रश्न 9 (आसान). ग्राफ को देखकर बताइए, बहुपद P(x) = x + 3 का शून्यक क्या होगा, यदि इसका ग्राफ x-अक्ष को (-3, 0) पर काटता है?
उत्तर – -3

प्रश्न 10 (आसान). यदि किसी रैखिक बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को (5, 0) पर काटता है, तो उसका शून्यक क्या है?
उत्तर – 5

प्रश्न 11 (मध्यम). एक रैखिक बहुपद 3x - 6 का शून्यक ज्ञात कीजिए और बताइए कि इसका ज्यामितीय अर्थ क्या है?
उत्तर – शून्यक 2 है। ज्यामितीय अर्थ है कि y = 3x - 6 का ग्राफ x-अक्ष को बिंदु (2, 0) पर काटता है।

» द्विघात बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ

प्रश्न 12 (आसान). अगर किसी द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को बिल्कुल नहीं काटता, तो उसके कितने शून्यक होंगे?
उत्तर – कोई शून्यक नहीं।

प्रश्न 13 (आसान). द्विघात बहुपद का ग्राफ किस आकार का होता है?
उत्तर – परवलय (Parabola) आकार का।

प्रश्न 14 (मध्यम). अगर किसी द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को सिर्फ एक बिंदु पर छूता है (स्पर्श करता है), तो उसके कितने शून्यक होंगे?
उत्तर – एक शून्यक (दो बराबर शून्यक)।

» त्रिघात बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ

प्रश्न 15 (आसान). एक त्रिघात बहुपद के ग्राफ ने x-अक्ष को 2 बिंदुओं पर काटा। शून्यकों की संख्या बताओ।
उत्तर – 2

प्रश्न 16 (आसान). अगर किसी त्रिघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को सिर्फ एक बिंदु पर छूकर निकल जाए, तो शून्यक कितने होंगे?
उत्तर – 1

प्रश्न 17 (मध्यम). क्या किसी त्रिघात बहुपद के शून्यक 4 हो सकते हैं? हाँ या नहीं?
उत्तर – नहीं, क्योंकि त्रिघात बहुपद के अधिकतम 3 शून्यक हो सकते हैं।

» रैखिक बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

प्रश्न 18 (आसान). रैखिक बहुपद 3x - 9 का शून्यक क्या है?
उत्तर – 3

प्रश्न 19 (आसान). रैखिक बहुपद 7x + 21 का शून्यक क्या है?
उत्तर – -3

प्रश्न 20 (मध्यम). यदि एक रैखिक बहुपद का शून्यक -5 है और x का गुणांक 2 है, तो अचर पद क्या होगा?
उत्तर – 10

प्रश्न 21 (कठिन). एक रैखिक बहुपद p(x) = ax + b है। यदि p(2) = 0 और p(0) = 4, तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – a = -2, b = 4

» द्विघात बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

प्रश्न 22 (आसान). बहुपद $x^2 + 5x + 4$ के शून्यकों का योग ज्ञात कीजिए।
उत्तर – -5

प्रश्न 23 (आसान). बहुपद $x^2 - 3x + 2$ के शून्यकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 2

प्रश्न 24 (मध्यम). एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग 3 और गुणनफल 2 है।
उत्तर – $x^2 - 3x + 2$ (या $k(x^2 - 3x + 2)$)

प्रश्न 25 (कठिन). यदि बहुपद $2x^2 - 8x + k$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का दोगुना है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 8

» दिए गए शून्यकों के योग/गुणनफल से द्विघात बहुपद बनाना

प्रश्न 26 (आसान). द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग 4 और गुणनफल 1 है।
उत्तर – $x^2 - 4x + 1$

प्रश्न 27 (आसान). द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग 0 और गुणनफल 5 है।
उत्तर – $x^2 + 5$

प्रश्न 28 (मध्यम). द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग -1/4 और गुणनफल 1/4 है।
उत्तर – $4x^2 + x + 1$

प्रश्न 29 (कठिन). द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग 2 और गुणनफल 1/3 है।
उत्तर – $3x^2 - 32x + 1$

» त्रिघात बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

प्रश्न 30 (आसान). बहुपद $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ के शून्यकों का योग ज्ञात कीजिए।
उत्तर – -6

प्रश्न 31 (आसान). बहुपद $2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ में शून्यकों का गुणनफल क्या होगा?
उत्तर – 7/2

प्रश्न 32 (मध्यम). यदि त्रिघात बहुपद $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ के शून्यक a-b, a, a+b हों, तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – a = 1 (शून्यकों का योग = 3a = -(-3)/1 = 3)

प्रश्न 33 (कठिन). यदि बहुपद $x^3 - 3px^2 + qx - r$ के शून्यक , , हैं, और ++ = 3, ++ = 5, = 7 हो, तो p, q, r के मान ज्ञात कीजिए।
उत्तर – p = 1, q = 5, r = 7

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. पहचानिए कि क्या $x^2 + x - 3$ एक बहुपद है? अगर है, तो इसकी घात क्या है?

› सबसे पहले, हम समीकरण के हर पद में चर की घात देखेंगे।

› पहले पद में चर 'x' की घात 2 है, जो एक पूर्ण संख्या है।

› दूसरे पद में 'x' है। 'x' का मतलब होता है 'x^(1/2)'। यहाँ चर 'x' की घात 1/2 है, जो एक पूर्ण संख्या नहीं है, यह एक भिन्न (fraction) है।

› तीसरे पद में कोई चर नहीं है, इसे हम '3x^0' मान सकते हैं, जहाँ घात 0 है, जो एक पूर्ण संख्या है।

› चूंकि दूसरे पद में चर की घात पूर्ण संख्या नहीं है, इसलिए यह पूरा व्यंजक बहुपद नहीं है।

उत्तर – नहीं, $x^2 + x - 3$ एक बहुपद नहीं है क्योंकि इसमें x की घात 1/2 है, जो एक पूर्ण संख्या नहीं है।

उदाहरण 2. बहुपद p(x) = 2x + 3 का शून्यक ज्ञात कीजिए।

› पहला कदम, हम जानते हैं कि शून्यक वह मान होता है जहाँ p(x) = 0 होता है।

› तो हम लिखेंगे: 2x + 3 = 0।

› अब हमें x का मान निकालना है। +3 को दूसरी तरफ ले जाएँगे, तो वह -3 हो जाएगा: 2x = -3।

› अब x के साथ जो 2 गुणा में है, उसे दूसरी तरफ ले जाने पर वह भाग में चला जाएगा: x = -3/2।

उत्तर – अतः, बहुपद p(x) = 2x + 3 का शून्यक -3/2 है।

उदाहरण 3. बहुपद P(x) = 2x - 4 के शून्यक का ज्यामितीय अर्थ समझाइए और ग्राफ पर दर्शाइए।

› सबसे पहले, हम y = 2x - 4 का ग्राफ बनाने के लिए कुछ बिंदु लेंगे।

› अगर x = 0 है, तो y = 2(0) - 4 = -4। तो एक बिंदु हुआ (0, -4)।

› अगर x = 1 है, तो y = 2(1) - 4 = -2। तो दूसरा बिंदु हुआ (1, -2)।

› अगर x = 2 है, तो y = 2(2) - 4 = 0। तो तीसरा बिंदु हुआ (2, 0)।

› अब इन बिंदुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित करेंगे और एक सीधी रेखा खींचेंगे।

› आप देखेंगे कि ये सीधी रेखा x-अक्ष को बिंदु (2, 0) पर काट रही है।

› इस बिंदु का x-निर्देशांक '2' है।

› तो इस रैखिक बहुपद 2x - 4 का शून्यक '2' है।

उत्तर – बहुपद P(x) = 2x - 4 का शून्यक 2 है, और ज्यामितीय रूप से इसका अर्थ है कि y = 2x - 4 का ग्राफ x-अक्ष को बिंदु (2, 0) पर प्रतिच्छेद करता है, और इस बिंदु का x-निर्देशांक ही शून्यक है।

उदाहरण 4. नीचे दिए गए ग्राफ में बहुपद के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए। (एक ग्राफ जिसमें एक परवलय x-अक्ष को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काट रहा है।)

› पहला कदम: ग्राफ को ध्यान से देखो।

› दूसरा कदम: यह देखो कि परवलय x-अक्ष को कितनी बार और कहाँ-कहाँ काट रहा है।

› तीसरा कदम: अगर ग्राफ x-अक्ष को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटता है, तो दो शून्यक होते हैं। अगर एक बिंदु पर स्पर्श करता है, तो एक शून्यक। और अगर बिल्कुल नहीं काटता, तो कोई शून्यक नहीं।

› चौथा कदम: इस ग्राफ में परवलय x-अक्ष को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काट रहा है।

उत्तर – इस बहुपद के शून्यकों की संख्या 2 है।

उदाहरण 5. नीचे दिए गए ग्राफ को देखकर त्रिघात बहुपद के शून्यकों की संख्या बताओ। (चित्र में एक वक्र है जो x-अक्ष को तीन अलग-अलग बिंदुओं पर काट रहा है)

› सबसे पहले, हमें यह देखना है कि ग्राफ x-अक्ष को कहाँ-कहाँ काट रहा है।

› अब, उन बिंदुओं को गिनो जहाँ ग्राफ x-अक्ष को काटता है।

› यहाँ ग्राफ x-अक्ष को तीन अलग-अलग बिंदुओं पर काट रहा है।

उत्तर – इसलिए, इस त्रिघात बहुपद के शून्यकों की संख्या 3 है।

उदाहरण 6. रैखिक बहुपद 5x + 15 का शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यक तथा गुणांकों के बीच संबंध की पुष्टि कीजिए।

› सबसे पहले हम बहुपद 5x + 15 को ax + b से तुलना करेंगे।

› यहाँ a = 5 (x का गुणांक) और b = 15 (अचर पद)।

› शून्यक निकालने के लिए, हम बहुपद को 0 के बराबर रखेंगे: 5x + 15 = 0।

› अब इसे हल करेंगे: 5x = -15।

› तो x = -15 / 5 = -3। यह हमारा शून्यक है।

› अब संबंध की पुष्टि करेंगे: सूत्र के अनुसार, शून्यक = -b/a।

› सूत्र में मान रखने पर: शून्यक = -(15) / 5 = -3।

› दोनों मान बराबर हैं, तो संबंध की पुष्टि हो गई।

उत्तर – रैखिक बहुपद 5x + 15 का शून्यक -3 है, और यह शून्यक - (अचर पद) / (x का गुणांक) संबंध को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 7. द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

› सबसे पहले, हम बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात करते हैं। इसके लिए हम मध्य पद को विभक्त करने की विधि का उपयोग करेंगे।

› हम 7x को 2x + 5x लिख सकते हैं, क्योंकि 2 × 5 = 10 और 2 + 5 = 7।

› तो, $x^2 + 2x + 5x + 10 = x(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(x + 5)$।

› शून्यक ज्ञात करने के लिए, (x + 2)(x + 5) = 0 रखते हैं। इससे x + 2 = 0 या x + 5 = 0 मिलता है।

› तो, x = -2 या x = -5। अतः, शून्यक = -2 और = -5 हैं।

› अब हम गुणांकों की पहचान करते हैं: दिए गए बहुपद $x^2 + 7x + 10$ की तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर, हमें a = 1, b = 7 और c = 10 मिलता है।

› शून्यकों का योग = + = (-2) + (-5) = -7।

› सूत्र से योग = -b/a = -(7)/1 = -7।

› यहाँ दोनों मान बराबर हैं, तो संबंध सत्य है।

› शून्यकों का गुणनफल = × = (-2) × (-5) = 10।

› सूत्र से गुणनफल = c/a = 10/1 = 10।

› यहाँ भी दोनों मान बराबर हैं, तो संबंध सत्य है।

उत्तर – शून्यक -2 और -5 हैं। शून्यकों का योग -7 है, जो -b/a (-7/1) के बराबर है। शून्यकों का गुणनफल 10 है, जो c/a (10/1) के बराबर है। संबंध की सत्यता की जाँच हो गई।

उदाहरण 8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग -3 है और गुणनफल 2 है।

› सबसे पहले, हम दिए गए मान लिखेंगे। हमें शून्यकों का योग (S) = -3 दिया है।

› और शून्यकों का गुणनफल (P) = 2 दिया है।

› अब हम अपने सूत्र का इस्तेमाल करेंगे: $k(x^2 - Sx + P)$।

› इसमें S और P के मान रखेंगे। यह बनेगा: $k(x^2 - (-3)x + 2)$।

› कोष्टक खोलकर इसे सरल करेंगे: $k(x^2 + 3x + 2)$।

› यहाँ, k कोई वास्तविक संख्या हो सकती है। सबसे आसान बहुपद तब मिलता है जब हम k=1 लेते हैं।

उत्तर – तो हमारा द्विघात बहुपद होगा: $x^2 + 3x + 2$।

उदाहरण 9. त्रिघात बहुपद $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ के शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए, यदि इसके शून्यक 3, -2 और -4 हैं।

› सबसे पहले, दिए गए बहुपद की तुलना मानक रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से करें। यहाँ a = 1, b = -5, c = -2, d = 24 है।

› शून्यक दिए गए हैं: = 3, = -2, = -4।

› पहला संबंध: शून्यकों का योग + + = 3 + (-2) + (-4) = 3 - 2 - 4 = -3। सूत्र से, -b/a = -(-5)/1 = 5। अरे, यहाँ तो कुछ गड़बड़ है। शून्यक 3, -2 और -4 हैं। मुझे लगता है कि मैंने सवाल में एक छोटी सी गलती कर दी है, चलो मैं इसे सुधार कर बताती हूँ। यह त्रिघात बहुपद $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ है। इसके शून्यक 3, -2 और -4 हैं। तो यहाँ a=1, b=3, c=-10, d=-24 है।

› अब फिर से देखते हैं। पहला संबंध: शून्यकों का योग + + = 3 + (-2) + (-4) = 3 - 2 - 4 = -3। सूत्र से, -b/a = -(3)/1 = -3। हाँ, ये बिल्कुल सही है! + + = -b/a.

› दूसरा संबंध: दो-दो शून्यकों के गुणनफल का योग + + = (3)(-2) + (-2)(-4) + (-4)(3) = -6 + 8 - 12 = -10। सूत्र से, c/a = (-10)/1 = -10। ये भी बिल्कुल सही है! + + = c/a.

› तीसरा संबंध: शून्यकों का गुणनफल = (3)(-2)(-4) = 24। सूत्र से, -d/a = -(-24)/1 = 24। अरे वाह! ये भी एकदम सही है! = -d/a.

उत्तर – त्रिघात बहुपद $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ के शून्यक 3, -2, और -4 के लिए, शून्यकों और गुणांकों के बीच सभी तीनों संबंध सत्यापित (verified) होते हैं।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• बोर्ड परीक्षा में अक्सर बहुपद की पहचान या उसकी घात पर सीधा एक नंबर का प्रश्न आता है। खासकर x, 1/x जैसे व्यंजकों को ध्यान से देखना, वे बहुपद नहीं होते!

• रैखिक बहुपद के शून्यक पर आधारित छोटे प्रश्न अक्सर 1 या 2 नंबर के लिए बोर्ड परीक्षा में आते हैं, इसे अच्छे से समझ लो!

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 1-2 अंक के वस्तुनिष्ठ प्रश्नों (objective questions) में ग्राफ देखकर शून्यकों की संख्या बताने के लिए पूछी जाती है। ध्यान से ग्राफ को देखना और x-अक्ष के कटावों को गिनना।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। ग्राफ़ देखकर शून्यकों की संख्या बताने वाले प्रश्न अक्सर आते हैं।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर ग्राफ देखकर शून्यकों की संख्या पहचानने वाले प्रश्नों के लिए महत्वपूर्ण है। ध्यान से गिनना और सिर्फ x-अक्ष वाले बिंदुओं को ही गिनना!

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि यह द्विघात और त्रिघात बहुपदों के संबंधों की नींव बनाती है। इस पर आधारित सीधे प्रश्न अक्सर आते हैं।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! 'शून्यक ज्ञात कीजिए और संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए' वाले प्रश्न अक्सर आते हैं। हर स्टेप को साफ़-साफ़ लिखना और सूत्रों को सही तरीके से लगाना याद रखना।

• यह प्रश्न अक्सर बोर्ड परीक्षाओं में 2-3 अंकों के लिए आता है। k की जगह 1 मानकर उत्तर लिख सकते हैं, जब तक प्रश्न में 'सभी संभावित बहुपद' ना पूछा गया हो।

• यह अवधारणा सीधे तौर पर बोर्ड परीक्षा में 4-5 अंकों का प्रश्न ला सकती है, जहाँ आपको संबंध सत्यापित करने या अज्ञात गुणांकों को खोजने के लिए कहा जा सकता है। चिन्हों की गलती से बचें!

एक नज़र में रिवीज़न

› बहुपद = चर की घात पूर्ण संख्या; घात = चर की उच्चतम घात।

› शून्यक: x का वह मान जिससे $p(x)=0$ हो; रैखिक बहुपद $ax+b$ का शून्यक = $-b/a$.

› रैखिक बहुपद का शून्यक = ग्राफ द्वारा x-अक्ष पर प्रतिच्छेदन बिंदु का x-निर्देशांक।

› द्विघात बहुपद के शून्यक = परवलय द्वारा x-अक्ष के प्रतिच्छेदन बिंदु।

› त्रिघात बहुपद के शून्यक = ग्राफ द्वारा x-अक्ष पर कटान बिंदु, अधिकतम 3.

› रैखिक बहुपद $ax+b$ का शून्यक = $-b/a$

› द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के लिए, शून्यकों का योग $-b/a$ और गुणनफल c/a होता है।

› शून्यकों के योग (S) और गुणनफल (P) से बहुपद: $k(x^2 - Sx + P)$

› त्रिघात बहुपद के शून्यक-गुणांक संबंध: $-b/a$, c/a, $-d/a$